4^{o} Μάθημα

ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΜΕ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Άσκηση

Τράπουλα 52 φύλλα

♣ A 2 3 ... 10 J Q K

♢

♡

♠

Χέρι πόκερ = 5 φύλλα χωρίς επανάθεση

π.χ $\boxed{2♠}$ $\boxed{2♡}$ $\boxed{3♠}$ $\boxed{A♡}$ $\boxed{A♣}$

καρέ → 4 όμοιο φύλλα - 1 διαφορετικό $\boxed{K}$ $\boxed{K}$ $\boxed{K}$ $\boxed{K}$ $\boxed{A}$

φουλ → 3 όμοια - 2 όμοια φύλλα $\boxed{K}$ $\boxed{K}$ $\boxed{K}$ $\boxed{A}$ $\boxed{A}$

$$P(\text{καρέ}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{13 \cdot 48 \cdot 5!}{(52)_5} = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \quad (*)$$

(*) Δημιουργία καρέ

1^{o} στάδιο: Επιλογή του αριθμού που θα εμφαν. 4 φορές → 13 τρ.

2^{o} στάδιο: Επιλογή άσχετου φύλλου → 48 τρόποι

3^{o} στάδιο: τοποθέτηση όλων των χαρτιών σε σειρά → 5! τρόποι

$$P(\text{φουλ}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5!}{(52)_5}$$

$$P(\text{όλα διαφορετικοί αριθμοί}) = \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{(52)_5} = \frac{(13)_5 \cdot 4^5}{(52)_5}$$

② Άσκηση

ν κλειδιά

Δοκιμάζουμε κ από αυτά (χωρίς επανάληψη)

P(μέχρι το κ κλειδί να ανοίξει η πόρτα) = ;

Αποτέλεσμα = $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\kappa)$

||

Δειγματικό σημείο

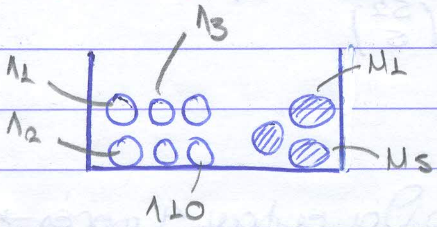
$$P_{\zeta\eta\tau} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{\kappa \cdot (\nu-1)_{\kappa-1}}{(\nu)_\kappa} = \frac{\kappa}{\nu}$$

Μία ευνοϊκή κ-άδα γίνεται σε στάδια.

1ο: επιλογή θέσης για το σωστό κλειδί → κ τρόποι

2ο: επιλογή και διάταξη των υπολοίπων κ−1 από τα (ν−1) κλειδιά → $(\nu-1)_{\kappa-1}$ τρόποι

③ Άσκηση



10 Λευκά σφαιρίδια

5 Μαύρα σφαιρίδια

("Ονομάζω" τα σφαιρίδια)

Εξαγωγή 3 σφαιριδίων χωρίς επανάθεση

$$P(\text{ακριβώς } 1M) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}\cdot 3!}{(15)_3} = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{5\cdot\frac{10\cdot 9}{2}\cdot 6}{15\cdot 14\cdot 13} = \frac{90}{182}$$

$$\text{ή} \quad = \frac{5\cdot 10\cdot 9 + 10\cdot 5\cdot 9 + 10\cdot 9\cdot 5}{15\cdot 14\cdot 13}$$

Εξαγωγή 3 σφαιριδίων με επανάθεση

$$P(\text{ακριβώς } 1N) = \frac{3\cdot 5\cdot 10^2}{15^3} = \frac{5\cdot 10\cdot 10 + 10\cdot 5\cdot 10 + 10\cdot 10\cdot 5}{15\cdot 15\cdot 15}$$

④ Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού

Ω δ.χ.

$E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) + \ldots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\ldots E_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

⑤ Πείραμα τύχης. Διαλέγω τυχαίο αριθμό από το $1, 2, \ldots, n$

$P_{\text{ζητ}} = P(\text{ο αριθμός να διαιρείται με το } 2, 3 \text{ ή το } 5) = ;$

A: (2 διαιρεί τον αριθμό)
B: (3 διαιρεί τον αριθμό)
Γ: (5 διαιρεί τον αριθμό)

$$P_{\text{ζητ.}} = P(A\cup B\cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma) + P(AB\Gamma)$$

$$= \frac{[n/2]}{n} + \frac{[n/3]}{n} + \frac{[n/5]}{n} - \frac{[n/6]}{n} - \frac{[n/10]}{n} - \frac{[n/15]}{n} + \frac{[n/30]}{n}$$

⑥ Το πρόβλημα των συναντήσεων Matching problem

n ανθρώπους και τα καπέλα τους
Διαλέγουν στα τυφλά
P(κανείς να μην πάρει το καπέλο του) = ;

Ορίζω E_i: ο άνθρωπος i παίρνει το καπέλο του

$$P\{nc\} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + \sum_{i<j} P(E_iE_j) - \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k) + \cdots + (-1)^n P(E_1E_2\cdots E_n)$$

$$\overset{*}{=} 1 - \binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!} + \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} - \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{(n-n)!}{n!}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} \Rightarrow$$

$$P\{nc\} = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

$*$ $P(E_i) = \dfrac{(n-1)!}{n!}$

$P(E_iE_j) = \dfrac{(n-2)!}{n!}$

(7) Παράδειγμα

20 ανθρώπους σε ασανσέρ $\xrightarrow{\text{αποβιβάζονται}}$ Όροφοι 1-5

$P_{\zeta\eta\tau.} = P$(τουλάχιστον ένας αποβιβάζεται σε κάθε όροφο)

—— • ——

Ω = Δειγμ. χώρος $= \{(i_1, i_2, \ldots, i_{20}) : i_1, \ldots, i_{20} \in \{1, 2, \ldots, 5\}\}$

$|\Omega| = 5^{20}$

E_i : Στον όροφο i δεν αποβιβάζεται κάποιος , $i = 1, 2, \ldots, 5$

$$P_{\zeta\eta\tau} = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} E_i^c\right) = 1 - \sum_{i=1}^{5} P(E_i) + \sum_{i<j} P(E_i E_j) - \ldots$$

$$P(E_i) = \frac{4^{20}}{5^{20}}$$

$$P(E_i E_j) = \frac{3^{20}}{5^{20}}$$ (ο καθένας έχει 3 επιλογές)

$$P(E_i E_j E_k) = \frac{2^{20}}{5^{20}}$$

Άρα $P_{\zeta\eta\tau} = 1 - 5 \cdot \frac{4^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{2} \frac{3^{20}}{5^{20}} - \binom{5}{3} \frac{2^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{4} \frac{1^{20}}{5^{20}}$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} (-1)^k \cdot \frac{(5-k)^{20}}{5^{20}}$$

$$= \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} (-1)^k \frac{(5-k)^{20}}{5^{20}}$$