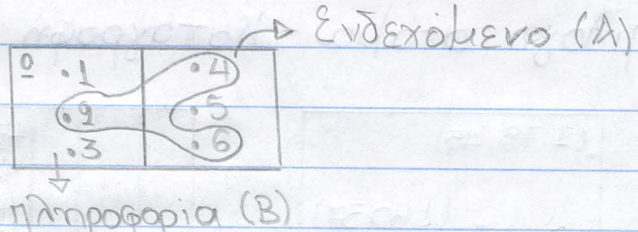
25/2/13

Δεσμευμένη Πιθανότητα

1. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: Ρίψη ζαριού

$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$



$P(\text{άρτιος}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{άρτιος} \mid \leq 3) = \frac{1}{3}$

$$P(A \mid B) = \frac{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } AB}{\text{πλήθος δειγματικών σημείων στο } B} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

▸ Περιορισμός δειγματικού χώρου

2. Ορισμός

$(\Omega, A, P) \to$ χώρος πιθανότητας

Δεσμευμένη πιθανότητα του δεδομένου του B

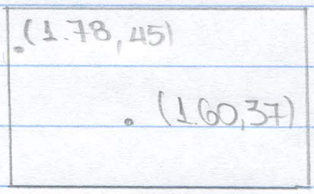
||

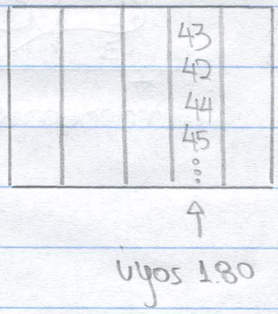
$$P(A \mid B) \overset{}{\underset{\text{ορσ.}}{=}} \frac{P(AB)}{P(B)}$$

3. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης πεπερασμένου πλήθους N ατόμων.

Επιλογή ατόμου - Καταγραφή ύψους - νούμερο παπουτσιού





$$\rightarrow P(\text{νούμερο } 45 \mid \text{ύψος } 1.80) = \frac{\#\text{ατόμων } (45, 1.80)}{\#\text{ ατόμων ύψους } 1.80}$$

$$P(A \mid B) \neq P(B \mid A)$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

4. Παράδειγμα

Φοιτητής σκέφτεται να δώσει $\xrightarrow{1/2}$ Συνδυαστική 1

Φοιτητής σκέφτεται να δώσει $\xrightarrow{1/2}$ Στοχαστικές Ανελίξεις

1ο στάδιο: Ποιο μάθημα θα δώσει

P(να περάσει | δίνει Συνδυαστική) = 60%

P(να περάσει | δίνει Στοχαστικές ανελίξεις) = 80%

2ο στάδιο: Πέρασε ή όχι

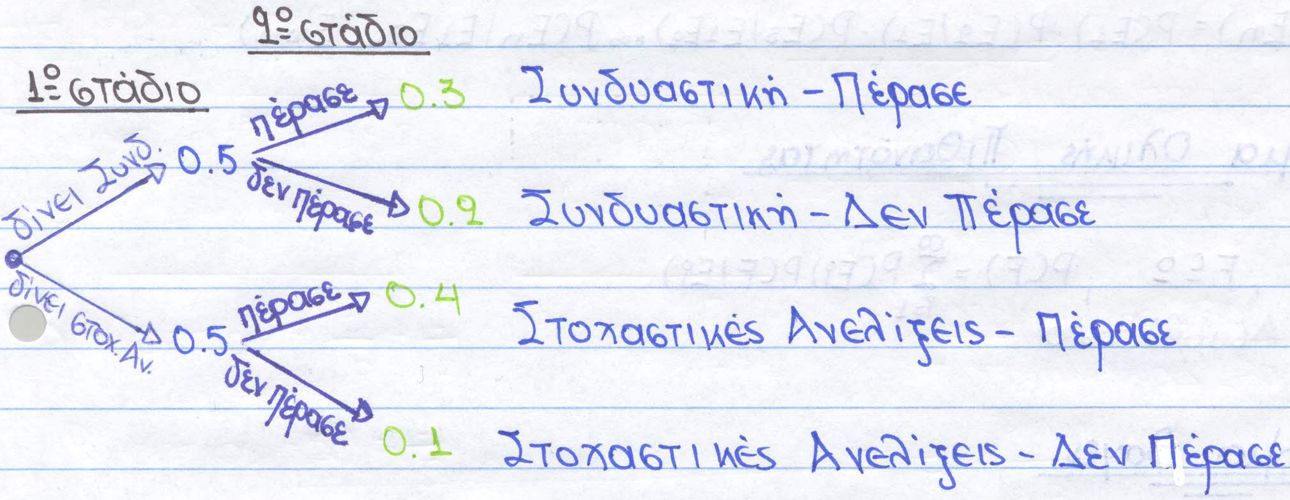
1ο στάδιο   2ο στάδιο

$P_1 = P$(να δώσει Συνδυαστική και να περάσει)

$P_2 = P$(να περάσει) → 2ο στάδιο

$P_3 = P$(να δώσει Συνδυαστική / να έχει περάσει)

1ο στάδιο   2ο στάδιο



- A: δίνει Συνδυαστική
- A^c: δίνει Στοχαστικές Ανελίξεις

B: Περνάει

B^c: Δεν περνάει

$P_1 = P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$

$P_2 = P(B) = P(BA) + P(BA^c) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 0.7$

$P_3 = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.7} = \frac{3}{7}$

$P(A) = P(A^c) = 0.5$

$P(B|A) = 0.6$

$P(B|A^c) = 0.8$

5. Βασικά Υπολογιστικά Θεωρήματα

1. Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$P(E_1E_2\ldots E_n)=P(E_1)\cdot P(E_2/E_1)\cdot P(E_3/E_1E_2)\ldots P(E_n/E_1E_2\ldots E_{n-1})$$

2. Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i \quad , F\subseteq\Omega \quad , P(F)=\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)P(F/E_i)$$

↳ Ασυμβίβαστα

3. Θεώρημα Bayes

$$P(E/F)=\frac{P(E)P(F/E)}{P(F)}$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ έχει νόημα μόνο για $P(B)\neq 0$.

6. Αποδείξεις

- $P(E_1E_2\ldots E_n)=P(E_1)\frac{P(E_2E_1)}{P(E_1)}\cdot\frac{P(E_3E_2E_1)}{P(E_1E_2)}\ldots\frac{P(E_n\ldots E_1)}{P(E_1\ldots E_{n-1})}$

  $=P(E_1)P(E_2/E_1)P(E_3/E_1E_2)\ldots P(E_n/E_1E_2\ldots E_{n-1})$

- $P(F)=P(F\Omega)=P(F\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}FE_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(FE_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)\frac{P(FE_i)}{P(E_i)}=$

  $=\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)P(F/E_i)$

- $P(E/F)=\frac{P(EF)}{P(F)}=\frac{P(F/E)P(E)}{P(F)}$

7. Παράδειγμα

Αιματολογικό Τεστ για μια σπάνια ασθένεια.

$P(\text{ασθενής}) = 1‰ = 0.001$

$P(\text{αληθές θετικό}) = 99\% = 0.99 \rightarrow P(\text{θετικό} \mid \text{ασθενής})$

$P(\text{ψευδές θετικό}) = 2\% = 0.02 \rightarrow P(\text{θετικό} \mid \text{υγιής})$

Τι ενδιαφέρει όμως;

$$P(\text{ασθενής} \mid \text{θετικό}) = \frac{P(\text{ασθενής})\,P(\text{θετικό} \mid \text{ασθενής})}{P(\text{θετικό})}$$

$$P(\text{θετικό}) = P(\text{ασθενής})\,P(\text{θετικό} \mid \text{ασθενής}) + P(\text{υγιής})\,P(\text{θετικό} \mid \text{υγιής})$$

$$= 0.001 \cdot 0{,}99 + 0.999 \cdot 0.02$$

$P(\text{ασθενής})\,P(\text{θετικό} \mid \text{ασθενής}) = 0.001 \cdot 0{,}99$

$$P(\text{ασθενής} \mid \text{θετικό}) = \frac{99}{99+1998} = 0.0472 \simeq 4\%$$