27/2/13

Ασκήσεις και Εφαρμογές στον Πολλ/κό Νόμο

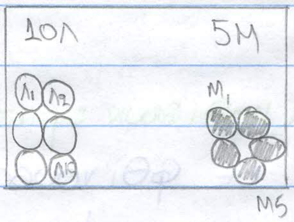
1. Πολλ/κός Νόμος

$E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ με $P(E_1 E_2 E_3 \ldots E_n) > 0$

$\Downarrow$

$$P(E_1 E_2 \ldots E_n) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | E_1 E_2) \ldots P(E_n | E_1 E_2 \ldots E_{n-1})$$

2. Παραδείγματα



→ Εξαγωγή 4 σφαιριδίων χωρίς επανάθεση

$P(1^{\text{ο}}\Lambda, 2^{\text{ο}}M, 3^{\text{ο}}M, 4^{\text{ο}}\Lambda) = P_{\text{ζητούμενο}}$

$1^{\text{η}}$ λύση (Συνδυαστική - Διατάξεις)

$$P_{\text{ζητ.}} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9}{(15)_4}$$

$2^{\text{η}}$ λύση (Πολλ/κός Νόμος)

$$P_{\text{ζητ.}} = P(1^{\text{ο}}\Lambda) \cdot P(2^{\text{ο}}M | 1^{\text{ο}}\Lambda)\, P(3^{\text{ο}}M | 1^{\text{ο}}\Lambda, 2^{\text{ο}}M)\, P(4^{\text{ο}}\Lambda | 1^{\text{ο}}\Lambda, 2^{\text{ο}}M, 3^{\text{ο}}M)$$

$$= \frac{10}{15} \, \frac{5}{14} \, \frac{4}{13} \, \frac{9}{12}$$

3. Παράδειγμα

Θέατρο → 1 σειρά 7 καθισμάτων, έρχονται 7 θεατές
κάθε θεατής ονομάζεται με τη σειρά άφιξης του

7	2	6	1	4	3	5	×
7	4	1	2	3	5	6	✓
7	6	5	1	2	3	4	✓
7	5	3	1	2	4	6	✓

1η λύση (Συνδυαστική)

$P_{ζητ.}$ = P(να καθίσουν όλοι χωρίς να χρειαστεί να περάσει κάποιος μπροστά από τον άλλο).

$$P_{ζητ.} = \frac{ευνοϊκές}{δυνατές}$$

↱ καθορίζεται από το ποιοι θα καθίσουν αριστερά

Ευνοϊκή Μετάθεση: οι θεατές αριστερά του 1 σε φθίνουσα σειρά και οι θεατές δεξιά του 1 σε αύξουσα σειρά.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 1η θέση} = 1 = \binom{6}{0} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 2η θέση} = 6 = \binom{6}{1} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 3η θέση} = \binom{6}{2} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 4η θέση} = \binom{6}{3} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 5η θέση} = \binom{6}{4} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 6η θέση} = \binom{6}{5} \\
\text{Ευνοϊκές με τον 1 στην 7η θέση} = \binom{6}{6} = 1
\end{array}\right\} \begin{array}{c} \#\,\text{ευνοϊκών} \\ \sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i} = 2^6 \end{array}$$

$$P_{ζητ.} = \frac{2^6}{7!}$$

2η λύση (Πολλ/κος Νόμος)

Ο τελευταίος πρέπει να καθίσει σε κάποια άκρη.
Ο προ-τελευταίος πρέπει να καθίσει σε κάποια από τις νέες άκρες
⋮

$$P_{ζητ} = \frac{2}{7}\,\frac{2}{6}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{2}{2} = \frac{2^6}{7!}$$

4. Παράδειγμα

n άτομα, $n \leq 365$

1η λύση (Συνδυαστική)

$$P(\text{όλοι γεννέθλια σε διαφορετικές μέρες}) = \frac{(365)_n}{365^n}$$

2η λύση (Πολλ/κος Νόμος)

$$P_{ζητ.} = \underbrace{\overset{\text{2ος διαφορετική μέρα από 1ο}}{\frac{364}{365}}\;\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(n-1)}{365}}_{n-1 \text{ όροι}} = \frac{(364)_{n-1}}{365^{n-1}}$$

5. Παράδειγμα

A 2 3 ... 10 J Q K

♣

♦

♥

♠

$\rightarrow$ Μοιράζεται σε $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ΠΑΙΧΤΕΣ}}}{4} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ΦΥΛΛΑ}}}{13}$

$P_{ζητ.} = P($κάθε παίκτης παίρνει 1 Άσσο$) = ;$

Αποτέλεσμα = Δειγματικό σημείο $= (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{φύλλα } 1^{ου}}}{A_1}, A_2, A_3, A_4)$

1ος τρόπος (Συνδυαστικός)

$$P_{ζητ.} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{4! \circ \frac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\frac{52!}{13!\,\cancel{39!}}\;\frac{\cancel{39!}}{13!\,\cancel{26!}}\;\frac{\cancel{26!}}{13!\,\cancel{13!}}\;\frac{\cancel{13!}}{13!\,0!}}$$

$$P_{ζητ.} = \frac{13^4 \cdot 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{3!\;13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

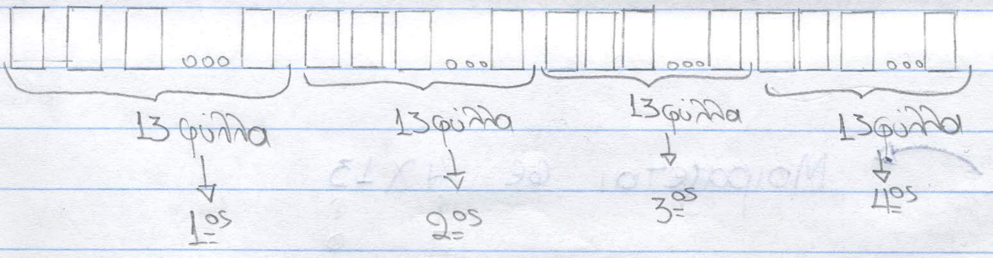
2ος τρόπος (Συνδυαστικός/Πολλ/κός Νόμος)

$$P_{ζητ.} = P(\underbrace{\text{ο } 1^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_1}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 2^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_2}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 3^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_3}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 4^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_4})$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}$$

3ος Τρόπος (Πολλ/κός Νόμος)

Μοιρασιά ⤳ Μετάθεση των 52 φύλλων.



$P_{ζητ.} = P\Big($ο $A\diamondsuit$ να πέσει σε άλλον από αυτόν που πήρε το $A\clubsuit$, ο $A\heartsuit$ να πέσει σε άλλον από αυτόν που πήρε το $\clubsuit, \diamondsuit$, ο $A\spadesuit$ ...$\Big) = \frac{39}{51}$

$$= \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = \frac{3!\,13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

6. Παράδειγμα

$P($εξάρι στο Λόττο με 49 νούμερα$) = \dfrac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \dfrac{1}{\binom{49}{6}}$

Με Πολλ/κό Νόμο

$P($νούμερο του δελτίου μου στο 1º μπαλάκι, ... 2º μπαλάκι, ...$) =$

$$= \frac{6}{49}\,\frac{5}{48}\,\frac{4}{47}\,\frac{3}{46}\,\frac{2}{45}\,\frac{1}{44} = \frac{6!}{\binom{49}{6}}$$

$P($πενταρι στο Λόττο με 49 νούμερα$) = \dfrac{6}{49}\,\dfrac{5}{48}\,\dfrac{4}{47}\,\dfrac{3}{46}\,\dfrac{2}{45}\,\dfrac{43}{44} \cdot 6$

↳ χαλάει στο τελευταίο μπαλάκι

7. Παράδειγμα

Οικογένεια με 2 παιδιά

$P_1 = P($έχει 2 κορίτσια / έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι$)$

$P_2 = P($έχει 2 κορίτσια / το πρωτότοκο είναι κορίτσι$)$

$$P_1 = P(\{KK\} \mid \{KK, KA, AK\}) = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(\{KK\} \mid \{KK, KA\}) = \frac{1}{2}$$