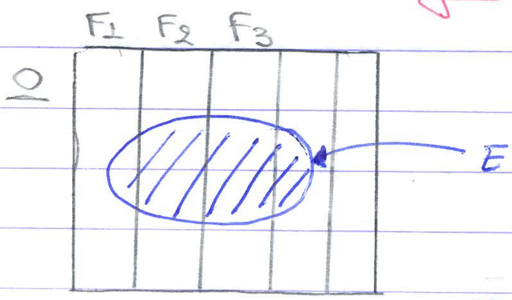
7º Μάθημα 1/3/13

Ασκήσεις και Εφαρμογές
Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας
Νόμος του Bayes

① Θ.Ο.Π. – Ν. Bayes

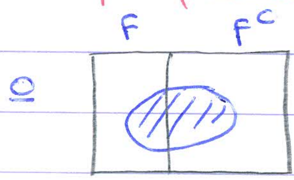


$$P(E) = P\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} EF_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i)$$

$E \subseteq \Omega$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ ← ασυμβίβαστα

Ειδική περίπτωση:



$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c)$$

Ν. Bayes:

$P(E|F) \longleftrightarrow P(F|E)$

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(E) \cdot P(F|E)}{P(F)}$$

② Παράδειγμα!

Ασφαλιστική Εταιρεία

κάθε ασφαλισμένος $\xrightarrow{30\%}$ επιρρεπής σε ατύχημα

κάθε ασφαλισμένος $\xrightarrow{70\%}$ μη-επιρρεπής σε ατύχημα

$P(\underbrace{\text{προκαλ. ατύχημα}}_{=E} \mid \underbrace{\text{επιρρεπής}}_{=F}) = 0,4$

$P(\quad — \,//\, — \quad \mid \underbrace{\text{μη επιρρεπής}}_{=F^c}) = 0,2$

Πείραμα τύχης: Επιλογή ασφαλισμένου κ' προκαλεί ατυχ/όχι

$p_1 = P(\text{επιρ. κ' προκαλεί ατύχημα}) = ;$

$p_2 = P(\text{προκαλεί ατύχημα}) = ;$

$p_3 = P(\text{επιρρεπής} \mid \text{προκαλ. ατυχ.}) = ;$

$$p_1 = P(FE) = P(F)\cdot P(E\mid F) = \boxed{P(E)\cdot P(F\mid E)} \overset{(*)}{=} 0,3\times 0,4 = 0,12$$

(*) $P(F) = 0,3$
$P(F^c) = 0,7$ 〉 πρέπει να έχουν άθροισμα 1!
$P(E\mid F) = 0,4$
$P(E\mid F^c) = 0,2$

$$p_2 = P(E) = P(F)\cdot P(E\mid F) + P(F^c)\cdot P(E\mid F^c)$$
$$= 0,3\times 0,4 + 0,7\times 0,2 = 0,26$$

$$p_3 = P(F\mid E) \overset{N.B.}{=} \frac{P(F)\cdot P(E\mid F)}{P(E)} = \frac{0,3\times 0,4}{0,26} = \frac{12}{26}$$

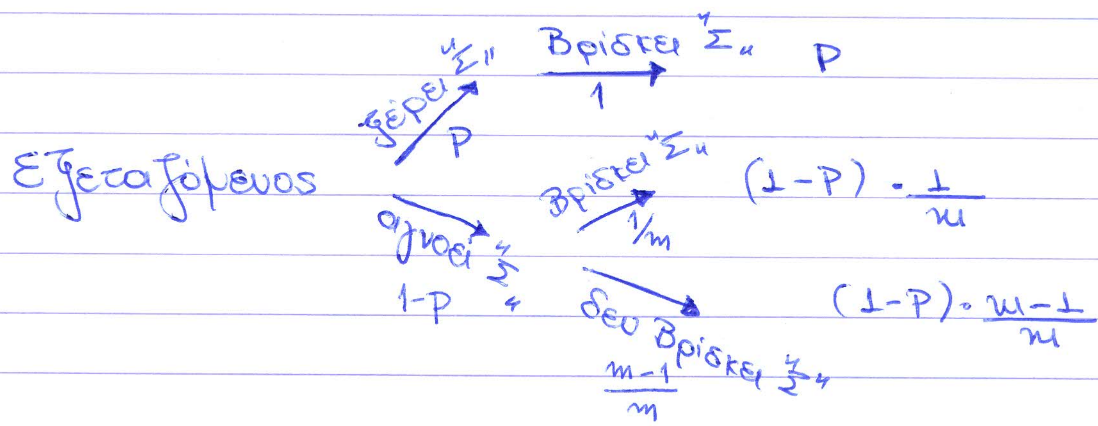
③ Παράδειγμα

Τεστ με 1 ερώτηση πολλαπλής επιλογής.
m επιλογές : 1 "Σ" + m-1 "Λ"

Ποσοστό των εξεταζομένων που γνωρίζουν τη "Σ" = P

Ποσοστό που μαντεύει = 1-P

$p_1 = P($ένας εξεταζόμενος να βρει τη "Σ"$) = ;$
$p_2 = P($να ήξερε τη "Σ" $|$ βρήκε τη "Σ"$) = ;$



$$P_1 \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(\text{ξέρει})\,P(\text{βρίσκει} \mid \text{ξέρει}) + P(\text{δεν ξέρει})\,P(\text{βρίσκει} \mid \text{δεν ξέρει})$$
$$= P \cdot 1 + (1-P)\frac{1}{m}$$

$$P_2 = P(\text{ήξερε} \mid \text{βρήκε}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\text{ξέρει}) \cdot P(\text{βρήκε} \mid \text{ήξερε})}{P(\text{βρήκε})} =$$

$$= \frac{P \cdot 1}{P \cdot 1 + (1-P)\frac{1}{m}} = \frac{m \cdot P}{(m-1)P + 1}.$$

④ Παράδειγμα (Samford)

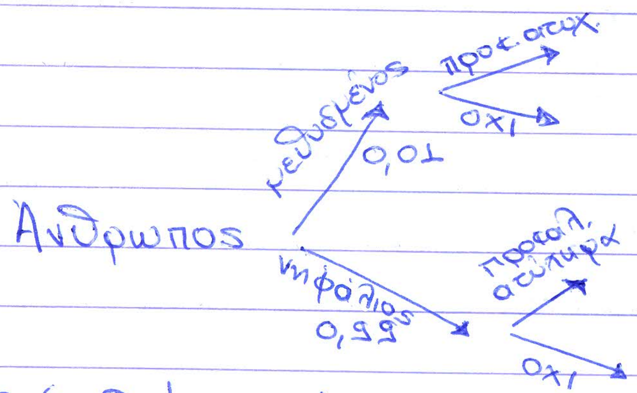
Πολιτικός A : Να καταργηθούν τα πρόστιμα για οδήγηση σε κατάσταση μέθης.

Επιχειρηματολογία: Μόνο το 10% των ατυχημάτων γίνονται από μεθυσμένους οδηγούς

Πολιτικός B : Όχι.

επιχειρηματολογία: Μόνο 1% οδηγών οδηγούν μεθυσμένοι.

— • —



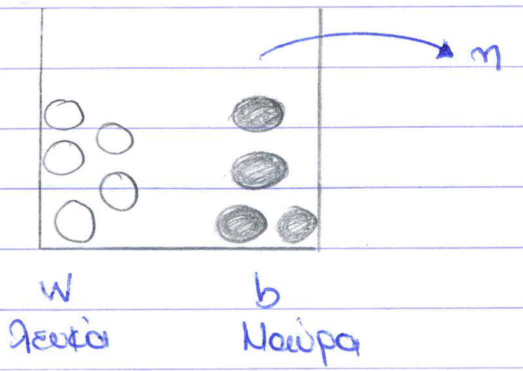
$P(\text{μεθ.}|\text{ατυχ.}) = 0,1$

$$\frac{P(\text{ατυχ.}|\text{μεθ.})}{P(\text{ατυχ.}|\text{νηφάλιος})} = \frac{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ.})}}{P(\text{μεθ.})} \cdot P(\text{μεθ.}|\text{ατυχ.})}{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ.})}}{P(\text{νηφ.})} \cdot P(\text{νηφ.}|\text{ατυχ.})} =$$

$$= \frac{\frac{0,1}{0,01}}{\frac{0,9}{0,99}} = 11$$

⑤ Παράδειγμα

$w+b$ σφαιρίδια



Επιλογή n σφαιριδίων από τα $w+b$ χωρίς επανάθεση ($n \le w+b$)

$$p_1 = P(1^o\ \Lambda \text{ και συνολικά } k\ \Lambda) = ;$$
$$p_2 = P(\text{συνολικά } k\ \Lambda) = ;$$
$$p_3 = P(1^o\ \Lambda \mid \text{συνολικά } k\ \Lambda) = ;$$

$$p_1 = P(1^o\Lambda)\cdot P(\text{συνολικά } k\ \Lambda \mid 1^o\Lambda) = \frac{w}{w+b}\cdot\frac{\binom{w-1}{k-1}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b-1}{n-1}}$$

$$p_2 = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$p_3 \overset{\text{N.Bayes}}{=} \frac{P(1^o\Lambda)\,P(\text{συνολ. } k\ \Lambda \mid 1^o\Lambda)}{P(\text{συνολ. } k\ \Lambda)} =$$

$$= \frac{\frac{w}{w+b}\cdot\binom{w-1}{k-1}\cdot\cancel{\binom{b}{n-k}}\Big/\binom{w+b-1}{n-1}}{\frac{\binom{w}{k}\cancel{\binom{b}{n-k}}}{\binom{w+b}{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{\frac{\cancel{w}}{\cancel{w+b}}\cdot\cancel{\binom{w-1}{k-1}}\Big/\binom{w+b-1}{n-1}}{\frac{\cancel{w}}{k}\cdot\cancel{\binom{w-1}{k-1}}\Big/\frac{\cancel{w+b}}{n}\cdot\binom{w+b-1}{n-1}} = \frac{k}{n}$$

(6) Παράδειγμα

Πείραμα τύχης

- Ρίψη ζαριού
- Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

$$\underbrace{P(\text{να εμφ. μόνο } \Gamma)}_{E} = \sum_{i=1}^{6} \underbrace{P(\text{το ζάρι φέρνει } i)}_{P(F_i)} \, \underbrace{P\left(\text{εμφ. μόνο } \Gamma \,\middle|\, \begin{matrix}\text{το ζάρι} \\ \text{έφερε } i\end{matrix}\right)}_{P(E|F_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2}} = \dots$$

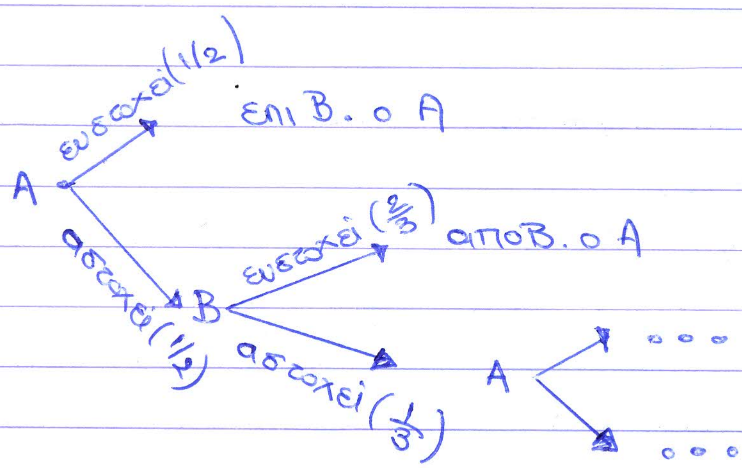
(7) Παράδειγμα

A, B μονομαχούν, ρίχνοντας εναλλάξ

$P(\text{ευστοχίας } A) = \frac{1}{2}$

$P(\text{ευστοχίας } B) = \frac{2}{3}$

$P(\text{επιβίωσης του } A \mid \text{άρχισε ο } A) = \;;$



Ενδεχόμενα

F_1: Ευστοχεί ο A στην $1^{η}$

F_2: Αστοχεί ο A στην $1^{η}$
Ευστοχεί ο B στην $2^{η}$

F_3: Αστοχεί ο A στην $1^{η}$
Αστοχεί ο B στην $2^{η}$

E: επιβίωσε ο A

$$P(E) = P(F_1)\cdot P(E|F_1) + P(F_2)\cdot P(E|F_2) + P(F_3)\cdot P(E|F_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot P(E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6}P(E) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(E) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

8 ΟΡΙΣΜΟΣ

Λόγος πιθανοφάνειας ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ (odds) ορίζεται το πηλίκο $\frac{P(A)}{P(A^c)}$ (πόσο πιθανότερο είναι να συμβεί το A από το να μην συμβεί)

Νόμος του Bayes (για odds ενός A)

$$\underbrace{\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}}_{\text{odds του A μετά την πληροφορία E}} = \left[\frac{\frac{P(A)\cdot P(E|A)}{P(E)}}{\frac{P(A^c)\cdot P(E|A^c)}{P(E)}}\right] = \underbrace{\frac{P(A)}{P(A^c)}}_{\text{αρχικά odds του A}} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$$