4/3/13

Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

1. Ιδέα

$P(E|F)$, E, F: ανεξάρτητα $\Longleftrightarrow$ $P(F|E) = \dfrac{P(FE)}{P(E)} = P(F)$

πληροφορία

$P(E|F) = \dfrac{P(EF)}{P(F)} = P(E)$

$P(EF) = P(E)P(F)$

2. Ορισμός

$E, F \subseteq \Omega$, ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(EF) = P(E)P(F)$

Γενικά, $E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$, ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(E_{i_1}E_{i_2}E_{i_3}\ldots) =$
$= P(E_{i_1})P(E_{i_2})\cdot \ldots \cdot P(E_{i_n})$
$\forall \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$

π.χ.

E, F, G: ανεξάρτητα $\Longleftrightarrow$ $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$
$P(EF) = P(E)P(F)$
$P(EG) = P(E)P(G)$
$P(FG) = P(F)P(G)$

3. Ασυμβίβαστα / Ανεξάρτητα

A, B : ασυμβίβαστα $\Leftrightarrow$ $AB = \emptyset$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\not\Uparrow \quad\quad\quad \not\Downarrow$

A, B : ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

A, B : ασυμβίβαστα και ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ $0 = P(AB) = P(A)\,P(B)$

$\Rightarrow P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$

4. Παρατήρηση

E, AB : ανεξάρτητα $\Rightarrow$
- E, A∪B : ανεξάρτητα
- E, AB : ανεξάρτητα
- E, A^c : ανεξάρτητα
- E, A^cB : ανεξάρτητα

π.χ.

$$P(E(A\cup B)) = P(EA \cup EB) = P(EA) + P(EB) - P(EAB)$$
$$= P(E)P(A) + P(E)P(B) - P(E)P(A|E)P(B|E) \rightarrow P(E)P(AB)$$
$$= P(E)\left[P(A) + P(B) - P(AB)\right]$$
$$= P(E) \cdot P(A\cup B)$$

5. Ανεξάρτητα ανά δύο

$E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα ανά δύο $\Longleftrightarrow P(E_i E_j) = P(E_i) P(E_j)$ $\forall\, i \neq j$.

$E_1, E_2, \ldots \subseteq \Omega$ ανεξάρτητα $\Rightarrow$ ανεξάρτητα ανά δύο
$\not\Leftarrow$ (όχι το ανάποδο)

6. (Αντι-)Παράδειγμα

Ρίψη 2 ζαριών

$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\} \leftarrow$ 36 στοιχεία

Α: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
Β: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
Γ: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
$\hookrightarrow \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \leftarrow$ 6 στοιχεία

$P(A) = \frac{1}{6}$
$P(B) = \frac{1}{6}$
$P(\Gamma) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} P(AB) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B) \\ P(A\Gamma) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(\Gamma) \\ P(B\Gamma) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(\Gamma) \end{array}\right\} \text{Α,Β,Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα}$$

$$P(AB\Gamma) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) P(\Gamma) = \frac{1}{6^3}$$
$\downarrow$
Α,Β,Γ όχι ανεξάρτητα

Ομοια με πριν (όχι το Γ)

Δ: το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.

↳ $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ ← 4 στοιχεία

$P(A\Delta) = \frac{1}{36}$, $P(A)P(\Delta) = \frac{1}{6}\frac{4}{36} = \frac{1}{54} \Rightarrow P(A\Delta) \neq P(A)\cdot P(\Delta)$

A,Δ όχι ανεξάρτητα

7. Παράδειγμα

A 2 3 ... 10 J Q K

♧

◇

♡

♤

Τραβάω φύλλο

A: είναι ♧

B: είναι K

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$P(B) = \frac{1}{13}$

$P(AB) = \frac{1}{52} = P(A)P(B)$

A,B ανεξάρτητα

Εναλλακτικά

Αν λείπει το 2 ◇

A,B → ανεξάρτητα;

$P(A) = \frac{13}{51}$, $P(B) = \frac{4}{51}$

$P(AB) = \frac{1}{51}$

$P(AB) \neq P(A)P(B)$ → A,B όχι ανεξάρτητα

8. Ανεξαρτησία Ενδεχομένων - Λόγος Πιθανοφάνειας (odds)

odds του $A = \frac{P(A)}{P(A^c)}$

Ν. Bayes : $\frac{P(A|E)}{P(A^c/E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$ $\Leftrightarrow$

odds του A μετά την παρατήρηση του E = αρχικά odds του A

$$\frac{P(A/E)}{P(A^c/E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)}$$

Απόδειξη

$$\frac{P(A/E)}{P(A^c/E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \Rightarrow \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1$$

$$\Rightarrow P(E|A) = P(E|A^c) \Rightarrow \frac{P(EA)}{P(A)} = \frac{P(EA)}{\underbrace{1-P(A)}_{P(A^c)}}$$

$$\Rightarrow P(EA) = P(EA)P(A) + P(EA^c)P(A) = P(E)P(A)$$

▸ Στην περίπτωση αυτή η συνεπαγωγικά πηγαίνει και ανάποδα ($\Leftarrow$)

9. Παράδειγμα

2 νομίσματα σε ένα συρτάρι

δίκαιο $\to$ K $\frac{1}{2}$, Γ $\frac{1}{2}$ κάλπικο $\to$ K $\frac{1}{4}$, Γ $\frac{3}{4}$

Πείραμα τύχης : 1ο στάδιο : επιλογή νομίσματος

2ο στάδιο : ρίψη

odds να είναι κάλπικο νόμισμα αν έφερε "Κ" =;

odds "Το νόμισμα είναι κάλπικο" $= \dfrac{P(\text{είναι κάλπικο})}{P(\text{είναι δίκαιο})} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

(Α = είναι κάλπικο, A^c = είναι δίκαιο)

odds "Το νόμισμα είναι κάλπικο αφού έφερε "Κ"" $= \dfrac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$

$$= \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

10. Η δεσμευμένη πιθανότητα ως νέο μέτρο πιθανότητας

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \longleftarrow$ χώρος πιθανότητας

$E \subseteq \Omega$, $P(E) > 0$

$P_E(A) = P(A|E) = \dfrac{P(AE)}{P(E)}$ είναι μέτρο πιθανότητας

▶ Όλες οι ιδιότητες για την $P(\ )$ ισχύουν και για την $P(\ |E)$

(i) $P(\Omega|E) = 1$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | E\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|E)$

↳ ασυμβίβαστα ανά δύο

(iii) $P((A \cup B)|E) = P(A|E) + P(B|E) - P(AB|E)$

$\vdots$

π.χ.

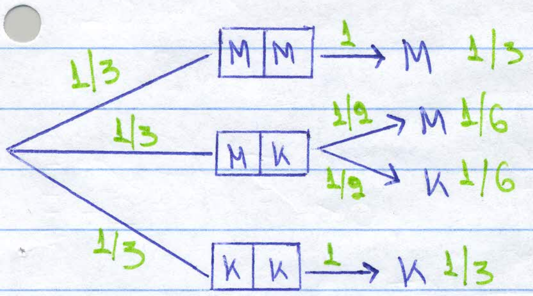
$P(E_1E_2 \ldots E_n|E) = P(E_1|E)P(E_2|E_1E) \ldots P(E_3|E_1E_2E) \ldots P(E_n|E_1 \ldots E_{n-1}E)$

11 Παράδειγμα

3 κάρτες $\boxed{M|M}$, $\boxed{M|K}$, $\boxed{K|K}$

Πείραμα Τύχης: Επιλογή Κάρτας
Εμφάνιση πλευράς

P(η άλλη επίσης μπλε | μπλε πλευρά)



A_1: Επιλέγεται η κάρτα ΜΜ
A_2: Επιλέγεται η κάρτα ΜΚ
A_3: Επιλέγεται η κάρτα ΚΚ

E: Δείχνεται Μ

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1)P(E|A_1)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{P(A_1)P(E|A_1)+P(A_2)P(E|A_2)+P(A_3)P(E|A_3)}$$

↑
N. Bayes

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{2}{3}$$