9ο Μάθημα

Ασκήσεις Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξαρτησία

① Άσκηση

Οικογένεια με 2 παιδιά

$P_1 = P$ (το άλλο Κ | το ένα παιδί Κ) = ;

$P_2 = P$ (το άλλο Κ | το πρωτότοκο Κ) = ;

$P_3 = P$ (το άλλο Κ | ανοίγει την πόρτα Κ) = ;

Λύση

G_1 : το πρωτότοκο Κ

G_2 : το δευτερότοκο Κ

H : το παιδί που ανοίγει την πόρτα είναι Κ

Άρα

$$P_1 = P(G_1 G_2 \mid G_1 \cup G_2)$$

$$P_2 = P(G_2 \mid G_1)$$

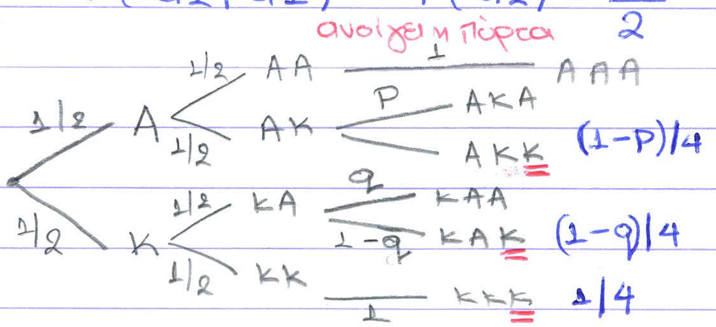
$$P_3 = P(G_1 G_2 \mid H)$$

$$P_1 = \frac{P(G_1 G_2)}{P(G_1 \cup G_2)} = \frac{P(G_1)P(G_2)}{P(G_1)+P(G_2)-P(G_1G_2)}$$

G_1, G_2 ανεξ.

$$= \frac{P(G_1)P(G_2)}{P(G_1)+P(G_2)-P(G_1)\cdot P(G_2)} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{1/2+1/2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(G_2 \mid G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$$



$$P_3 = P(G_1 G_2 \mid H) = \frac{P(G_1 G_2 H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1-p}{4}+\frac{1-q}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3-p-q}$$

Π.χ. (Διαφορές ανάλογα με την πολιτική της οικογένειας)
Αν ρίχνουν νόμισμα (δίκαιο) για το ποιος θα ανοίξει την πόρτα

$$p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Αν το αγόρι ανοίγει πάντα (εφόσον υπάρχει αγόρι)

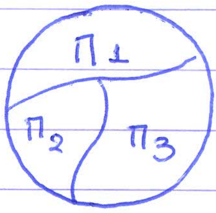
$$p = 1,\ q = 1 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3-1-1} = 1$$

Αν το πρωτότοκο ανοίγει πάντα

$$p = 1,\ q = 0 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3-1-0} = \frac{1}{2}$$

② Άσκηση

Αεροπλάνο έχει πέσει σε 1 από 3 περιοχές



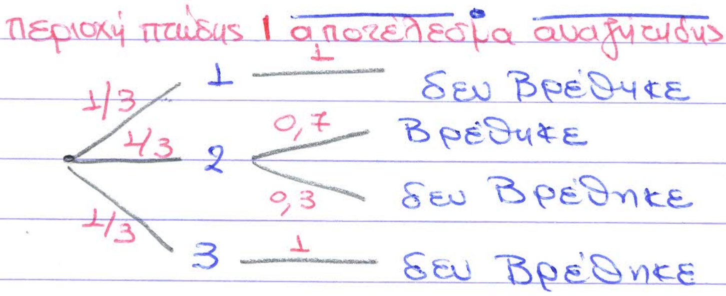
$$P(\text{έχει πέσει στην } i) = \frac{1}{3} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$P\left(\text{Βρεθεί} \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{έχει πέσει}\\ \text{στην } i \text{ και}\\ \text{ψάχουμε στην } i\end{array}\right) = B_i$$

$$B_1 = 30\%, \quad B_2 = 70\%, \quad B_3 = 10\%$$

Έστω ότι ψάχνουμε στη 2 περιοχή.

$$P(\underbrace{\text{έπεσε στη } 2}_{\substack{\text{περιοχή}\\ \text{πτώσης}}} \,|\, \underbrace{\text{δεν Βρέθηκε}}_{\substack{\text{αποτέλεσμα}\\ \text{αναζήτησης}}}) = ;$$



Άρα

$$P(\text{έπεσε στη } 2 \,|\, \text{δεν Βρέθηκε}) = \frac{P\left(\substack{\text{έπεσε}\\ \text{στη } 2}\right) P\left(\substack{\text{δεν}\\ \text{Βρέθηκε}} \,\middle|\, \substack{\text{έπεσε}\\ \text{στη } 2}\right)}{P\left(\substack{\text{δεν}\\ \text{Βρέθηκε}}\right)}$$

$$= \frac{(1/3) \cdot 0,3}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,3 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{0,3}{1 + 0,3 + 1} = \frac{0,3}{2,3}$$

③ Ασκηση

Οι Α, Β ρίχνουν εναλλάξ νόμισμα (Πιθαν. να φέρει Κ → P)
κερδίζει ο $1^{ος}$ που φέρνει Κ.
Αρχίζει ο Α.
P(κερδίζει ο Α) = ;

$1^{ος}$ τρόπος

Ε : κερδίζει ο Α
A_i : για πρώτη φορά έρχεται Κ στην i ρίψη.

$$E = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \dots \Rightarrow P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{2i+1})$$

$A_1, A_3, \dots$ Ασυμβίβ.

$$P(A_i) = (1-P)^{i-1} P$$

$$P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-P)^{2i} P = P \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left((1-P)^2\right)^i =$$

$$= P \cdot \frac{1}{1-(1-P)^2} = \frac{1}{2-P}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Ε : κερδίζει ο Α
B_1 : η πρώτη ρίψη να είναι Κ

Άρα

$$P(E) = \underbrace{P(B_1)}_{P} \cdot \underbrace{P(E|B_1)}_{1} + \underbrace{P(B_1^c)}_{1-P} \cdot \underbrace{P(E|B_1^c)}_{1-P(E) = P(E^c)} \Rightarrow$$

$$P(E) = P + (1-P)(1-P(E)) \Rightarrow P(E) = P + 1 - P - (1-P)P(E) \Rightarrow$$

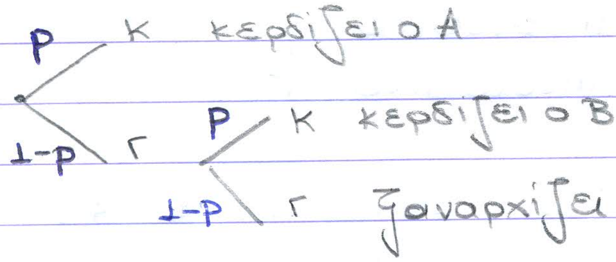
$$\Rightarrow (2-p)P(E) = 1 \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2-P}$$

$3^{ος}$ τρόπος

E: κερδίζει ο Α

A_1: η Κ έρχεται για πρώτη φορά στην $1^η$ ρίψη

A_2: — " — — " — $2^η$ ρίψη



$$P(E) = P(A_1)\cdot P(E|A_1) + P(A_1^c)\,P(E|A_1^c)$$

$$= p\cdot 1 + \underbrace{P(A_1^c A_2)}_{(1-p)\,p}\,\underbrace{P(E|A_1^c A_2)}_{=0} + \underbrace{P(A_1^c A_2^c)}_{(1-p)^2}\,\underbrace{P(E|A_1^c A_2^c)}_{P(E)}$$

$$= p + (1-p)^2 P(E) \iff$$

$$\iff P(E) = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

4 Άσκηση

Τρεις παίκτες με 3 διαφορετικά νομίσματα

$A \longrightarrow \kappa$ με πιθανότητα p

$B \longrightarrow \kappa$ με πιθανότητα q

$\Gamma \longrightarrow \kappa$ με πιθανότητα r

Ρίχνουν $A, B, \Gamma, A, B, \Gamma \ldots$ μέχρι την $1^{η}$ κ.

$P(\text{κερδίζει ο } A) = ;$

$1^{ος}$ τρόπος

E: κερδίζει ο A

A_i: έρχεται "κ" για πρώτη φορά στην i ρίψη

$$E = A_1 \cup A_4 \cup A_7 \cup \ldots \Rightarrow P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{3i+1})$$

$$P(A_{3i+1}) = P(\underbrace{\Gamma\Gamma\Gamma\ \Gamma\Gamma\Gamma \cdots \Gamma\Gamma\Gamma}_{i\text{-τριάδες}}\ \underset{p}{\kappa})$$

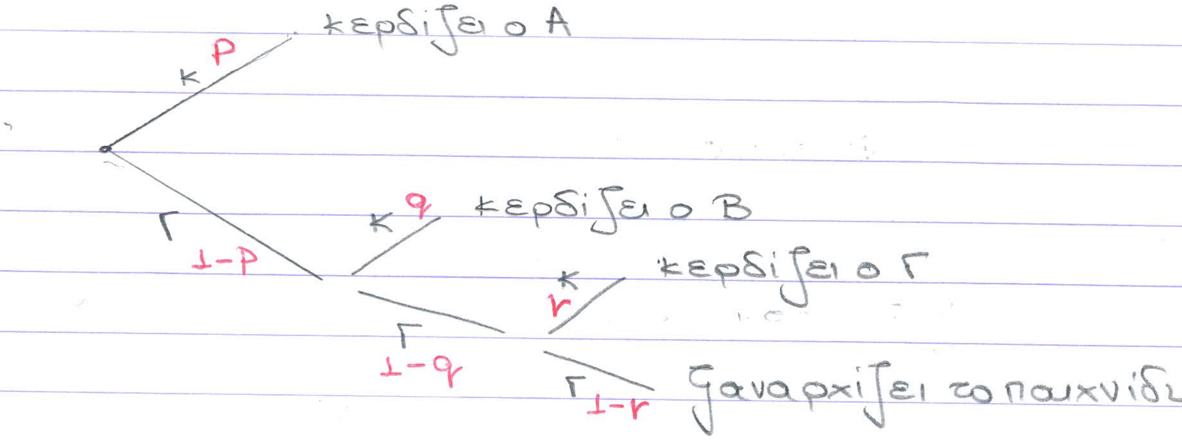
$$= \left((1-p)(1-q)(1-r)\right)^i p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E) = p \sum_{i=0}^{\infty} \left((1-p)(1-q)(1-r)\right)^i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

E : κερδίζει ο A



F_1 : η 1η ρίψη K

F_2 : η 2η ρίψη K

F_3 : η 3η ρίψη K

(οδηγός το δένδρο)

$$P(E) = P(F_1)\cdot P(E|F_1) + P(F_1^c F_2)\,P(E|F_1^c F_2) + $$
$$+ P(F_1^c F_2^c F_3)\,P(E|F_1^c F_2^c F_3) + $$
$$+ P(F_1^c F_2^c F_3^c)\,P(E|F_1^c F_2^c F_3^c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E) = p\cdot 1 + \cancel{(1-p)q\cdot 0 + (1-p)(1-q)r\cdot 0} + $$
$$+ (1-p)(1-q)(1-r)\cdot P(E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$