11/3/13

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X θα λέγεται διακριτή αν $\exists\, x_0, x_1, x_2, \ldots$ ώστε $P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}) = 1$

$f_X(x) = P(X = x) \rightsquigarrow$ συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)

Ιδιότητες

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\sum_x f_X(x) = 1$

συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$

συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$

$\Rightarrow$ $f(x) = F(x) - F(x-)$

$F(x) = \sum_{x_k \leq x} f(x_k)$

2. Παράδειγμα

$X = \#$ πελατών σε τράπεζα σε μια μέρα

$P(X = x) = c \dfrac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

λ ← γνωστό

c ← άγνωστη

(i) $c = ;$

(ii) $P(X=0) = ;$

(iii) $P(X \geq 2) = ;$

(iv) $P(X=3 / X \geq 2)$

(i) $\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c\frac{\lambda^x}{x!} = 1 \Rightarrow c\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = 1$

$\Rightarrow c = e^{-\lambda}$, αρα $P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,\ldots$

(ii) $P(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}$

(iii) $P(X\geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} P(X=x) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$

(iv) $P(X=3 / X\geq 2) = \frac{P(X=3, X\geq 2)}{P(X\geq 2)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^3}{3!}}{1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}}$

↳ ΠΟΤΕ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

3 Διαισθητικές Ερμηνείες της Μέσης Τιμής

1η: Μέσος όρος (Πεπερασμένο πλήθος - Επιλογή ατόμων)

Πεπερασμένο πλήθος με N άτομα.
X: χαρακτηριστικό

ΤΙΜΕΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ	0	1	2	3	...
# ατόμων που έχουν αυτή την τιμή	N_0	N_1	N_2	N_3	...

Τότε διαισθητικά: Μέση τιμή της X $= \frac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{N_0}+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{N_1}+\overbrace{2+2+\ldots+2}^{N_2}+\ldots}{N}$

$= 0\frac{N_0}{N} + 1\cdot\frac{N_1}{N} + 2\cdot\frac{N_2}{N} + \ldots = P(X=0) + 1P(X=1) + 2P(X=2) + \ldots$

$\Downarrow$

Πρέπει να ορίσουμε μέση τιμή της $X = E[X] = \sum_x x P(X=x)$

2η: Κέντρο Βάρους

π.χ.

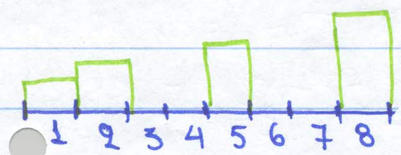
$X \to$ διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

$P(X=0) = \frac{1}{10}$

$P(X=1) = \frac{2}{10}$

$P(X=5) = \frac{3}{10}$

$P(X=8) = \frac{4}{10}$



$\to$ Αισθάνομαι ότι η μέση τιμή είναι ένας αριθμός μ ώστε:

$$\sum_x (x-\mu) P(X=x) = 0 \iff$$

$$\sum_x x P(X=x) = \mu \underbrace{\sum_x P(X=x)}_{=1}$$

Άρα οδηγούμαι στον ίδιο ορισμό

3η: Επαναλαμβανόμενα Πειράματα

Έστω ένα παιχνίδι,

X: κέρδος σε μια επανάληψη του παιχνιδιού

Μέση τιμή του X $\to$ Μέσο κέρδος ανά επανάληψη αν παίξω πολλές φορές

$P(X=1) = \frac{1}{6}$

$P(X=0.2) = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow$ 6 ζαριές: 1 (+1), 5 (−0.2)

$\hookrightarrow$ Ίδιος Μαθηματικός Ορισμός $\to \sum_x x P(X=x)$

4. Ορισμός

Εστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)=P_X(x)$.

Η μέση τιμή, $E[X]$, της X ορίζεται μέσω της $E[X]=\sum_x x P_X(x)$

αν $\sum_x |x| P_X(x) < \infty \rightarrow$ Πεπερασμένο

5. Δεικτριες Τυχαίες Μεταβλητές - Μέση τιμή

Πείραμα Τύχης με δειγματικό χώρο Ω

$A \subseteq \Omega$: ενδεχόμενο

Δεικτρια τυχαία μεταβλητή του $A \rightarrow 1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ $\omega \in \Omega$

π.χ.

Πείραμα Τύχης : Ρίψη δίκαιου ζαριού

X : ένδειξη $1^{ης}$ Ρίψης

Y : Πλήθος ρίψεων μέχρι το 1^o "6"

Z : Αθροισμα των 2 πρώτων ρίψεων.

$$E[X]=\sum_{x=1}^{6} x P(X=x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{(1+6)\cancel{6}}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$E[Y]=\sum_{y=1}^{\infty} y(Y=y) = \sum_{y=1}^{\infty} y\left(\frac{5}{6}\right)^{y-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 6$$

$$\sum_{y=0}^{\infty} t^y = t^0+t^1+t^2+\dots = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{y=1}^{\infty} y\, t^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$P(Z=2)=\frac{1}{36}$
$P(Z=3)=\frac{2}{36}$
$P(Z=4)=\frac{3}{36}$
$P(Z=5)=\frac{4}{36}$
$P(Z=6)=\frac{5}{36}$
$P(Z=7)=\frac{6}{36} \rightarrow E[Z]=\sum_{z=2}^{12} zP(Z=z) = \ldots = 7$
$P(Z=8)=\frac{5}{36}$
$P(Z=9)=\frac{4}{36}$
$P(Z=10)=\frac{3}{36}$
$P(Z=11)=\frac{2}{36}$
$P(Z=12)=\frac{1}{36}$

7. Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης: Διαγωνιζόμενος απαντάει σε 2 ερωτήσεις

Γεωγραφία   Ιστορία

Απαντά στην 1η
Απαντά στη 2η μόνο αν απαντήσει σωστά στην 1η.

Πιθανότητα σωστής απάντησης στην Ιστορία $= P_1 = 40\%$
Πιθανότητα σωστής απάντησης στην Γεωγραφία $= P_2 = 60\%$

Κέρδος σωστής απάντησης στην ιστορία $= u_1 = 100€$
Κέρδος σωστής απάντησης στην γεωγραφία $= u_2 = 80€$

Τι να απαντήσει πρώτα, Ιστορία ή Γεωγραφία;

• Αν απαντήσει πρώτα στην Ιστορία

X: κέρδος

Τιμές της $X = 0, u_1, u_1+u_2$

Αντίστοιχη πιθανότητα $P(X=x) = 1-p_1, p_1 \cdot (1-p_2), p_1 \cdot p_2 \rightarrow$ πρέπει να αθροίζουν στο 1

$E[X] = 0 \cdot (1-p_1) + u_1 \cdot p_1(1-p_2) + (u_1+u_2)p_1p_2$

$E[X] = u_1p_1 + u_2p_1p_2$

• Αν αρχίσει με τη γεωγραφία

Y: κέρδος

$E[Y] = u_2p_2 + u_1p_1p_2$

Άρα συμφέρει να αρχίσει με ιστορία $\Leftrightarrow E[X] \geq E[Y] \Leftrightarrow$

$$u_1p_1 + u_2p_1p_2 \geq u_2p_2 + u_1p_1p_2 \Leftrightarrow \frac{u_1p_1}{1-p_1} \geq \frac{u_2p_2}{1-p_2}$$