12ο Μάθημα 13/03/13

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
Μέση Τιμή - Διασπορά

① Παράδειγμα

X: Μηνιαίο εισόδημα ενός κατοίκου χώρα A
Y: -//- -//- - // - χώρα B

$E[X] < E[Y]$

- $P(Y=1) = \frac{999}{1000}$

$P(Y=1000001) = \frac{1}{1000}$

$E[Y] = 1 \cdot \frac{999}{1000} + 1000001 \cdot \frac{1}{1000} = 0,999 + 1000,001 =$

$= 1001$

- $P(X=900) = \frac{1}{2}$

$P(X=1000) = \frac{1}{2}$

$E[X] = 900 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot \frac{1}{2} = 950$

② Ορισμοί

X διακριτή τ.μ. σε δ.π. $P_X(x) = P(X=x)$

Μέση τιμή: $E[X] = \sum_x x P_X(x)$ ← Μέτρο θέσης

Διασπορά: $Var[X] = E[(X - E[X])^2]$ ← Μέτρο διακύμανσης μεταβλητότητας

όταν $\sum_x x^2 P_X(x) < \infty$

③ Παράδειγμα

X	-1	0	1
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	-1	0	1
$P(Y=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

Z	-2	0	2
$P(Z=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X] = (-1)\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$$

$$E[Y] = (-1)\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{8} = 0$$

$$E[Z] = \dots = 0$$

$$Var[X] = E[(X - \underbrace{E[X]}_{0})^2] = E[X^2] = 0\cdot P(X^2=0) + 1\cdot P(X^2=1) =$$
$$= 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var[Y] = E[(Y - \underbrace{E[Y]}_{0})^2] = E[Y^2] = 0\cdot P(Y^2=0) + 1\cdot P(Y^2=1) =$$
$$= 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Var[Z] = E[(Z - \underbrace{E[Z]}_{0})^2] = E[Z^2] = 0\cdot P(Z^2=0) + 4\cdot P(Z^2=4) =$$
$$= 0\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

④ Τυπική απόκλιση

Τυπική απόκλιση $= SP(X) = \sigma_X = \sqrt{Var[X]}$
της X

⑤ Μέση αρχή συνάρτησης τ.μ.

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $p_X(x) = P(X=x)$

$g(x)$

$Y = g(X)$

Τύπος για την $E[Y] = E[g(X)]$

⑥ Παράδειγμα

X τ.μ. με σ.π.

x	-3	-2	-1	0	1	4
$p_X(x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

$P(Y=y)$
$=$

$g(x) = x^2$ $\quad Y \equiv g(X) = X^2$ $\quad E[Y] = \sum_y y\, P_Y(y)$

y	0	1	4	9	16
$P_Y(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$

$P_X(x) \to P_X(y) \to E[Y]$

$$E[Y] = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{5}{16} + 4\cdot\frac{1}{8} + 9\cdot\frac{3}{16} + 16\cdot\frac{1}{8}$$

⑦ Θεώρημα

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_X(x) = P_X(X=x)$ } $\Rightarrow$
και $Y = g(X)$

$$\Rightarrow E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) P_X(x)$$

⑧ Συνέχεια Παραδείγματος 6

$$E[Y] = E[X^2] = \sum_x x^2 p_X(x) = (-3)^2 \cdot \frac{3}{16} + (-2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+ 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} \quad ①$$

(ίδιο με το προηγούμενο) ⑧

⑨ Απόδειξη Θεωρήματος

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot \underbrace{P_X(X=x)}_{= P_X(x)}$$

Απόδειξη:

$Y = g(X)$

$$P_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x: g(x)=y} P(X=x) = \sum_{x: g(x)=y} P_X(x)$$

$$E[g(X)] = E[Y] = \sum_y y P_Y(y) = \sum_y y \sum_{x: g(x)=y} P_X(x) =$$

$$= \sum_y \sum_{x: g(x)=y} g(x) \cdot P_X(x)$$

$$= \sum_x g(x) \cdot p_X(x)$$

(10) Προσοχή!!!

$$E[g(X)] \neq g(E[X])$$

π.χ. $E[X]=3 \not\Rightarrow E[X^2]=9$

(11) Βασικές ιδιότητες

1) $E[aX+b] = a \cdot E[X] + b$ (γραμμ. μετασχηματισμός)

2) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

3) $SD[aX+b] = |a| SD[X]$

4) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

Απόδειξη

1) $E[aX+b] = \sum_x (ax+b) \cdot P_X(x)$

$= a \underbrace{\sum_x x P_X(x)}_{E[X]} + b \cdot \underbrace{\sum P_X(x)}_{1} = a \cdot E[X] + b$

2) $Var[aX+b] = E[(aX+b - E[aX+b])^2]$

$= E[(aX+b - aE[X] - b)^2]$

$= E[a^2 \cdot (X - E[X])^2] = a^2 Var[X]$

3) $SP(aX+b) = \sqrt{Var[aX+b]} = \sqrt{a^2 Var[X]} = |a| \cdot SD[X]$

4) $Var[X] = E[(X - \underbrace{E[X]}_{\mu})^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] =$

$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

(12) Παράδειγμα

X = θερμοκρασία σε °C
Y = -//- σε °F

$$Y = 32 + \frac{9}{5}X \Rightarrow E[Y] = 32 + \frac{9}{5}E[X]$$

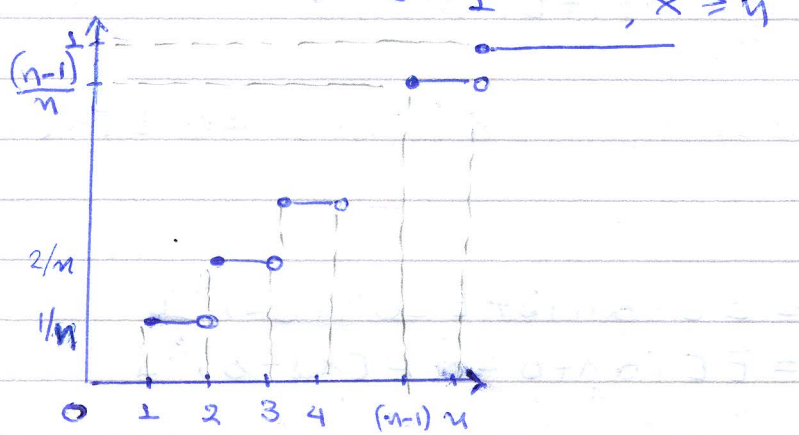
(13) Η Ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

Πείραμα τύχης: Τυχαία επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \dots, n\}$

X = αριθμός που επιλέχθηκε

Σ.Π. $P(X=x) = \frac{1}{n}$, $x = 1, 2, \dots, n$

Σ.Κ. $$P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \lfloor x \rfloor / n & , 1 \le x < n \\ 1 & , x \ge n \end{cases}$$



$$E[X] = \sum_x x P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Άρα $$Var[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)\cdot(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$