13º Μάθημα

① Υπενθυμίσεις

X διακριτή $\iff P(X \in \{x_0, x_1, \dots\}) = 1$

$F_X(x) = P(X \leq x) \;, x \in \mathbb{R}$ ← συνάρτηση κατανομής

$P_X(x) = P(X = x)$ ← συνάρτηση πιθανότητας

$$E[X] = \sum_x x P_X(x)$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) P_X(x)$$

$$E[aX+b] = aE[X] + b$$

$$Var[aX+b] = a^2 Var[X]$$

② Η ομοιόμορφη διακριτή κατανομή

Πείραμα Τύχης: Επιλογή αριθμού στο $\{1, 2, \dots, n\}$
X = Αριθμός που επιλέχθηκε

$$P_X(x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1, 2, \dots, n$$

$$E[X] = \frac{1+n}{2} \qquad Var[X] = \frac{n^2-1}{2}$$

③ Βασικά διακριτά πειράματα τύχης

Πείραμα Τύχης: Δοκιμές Bernoulli (επιτυχία → 1, αποτυχία → 0)

$x_1, x_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή)

$$P(X_i = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ \underbrace{1-p}_{q}, & x = 0 \end{cases}$$

τυχαία μετ.

X_1 = # επιτυχιών στην $1^η$ δοκιμή → Bernoulli(p)

S_n = # επιτυχιών μέχρι την n δοκιμή → Bin(n,p)

T_1 = # δοκιμών ως την $1^η$ επιτυχία

T_n = # — // — — // — n επιτυχία

<u>π.χ.</u> Γίνεται το πείραμα και παρατηρώ:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖	‖
0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

$X_1 = 0$

$S_3 = 0$, $S_7 = 3$, $S_{10} = 4$

$T_1 = 4$

$T_2 = 5$

$T_3 = 7$

④ Η κατανομή Bernoulli(p) ⟶ X_1

$$P(X_1=x)=\begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$$

$$E[X_1]=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

$$\begin{aligned} Var[X_1] &= E[X_1^2]-E[X_1]^2 \\ &= 0^2 P[X_1=0]+1^2 P[X_1=1]-p^2=p(1-p) \end{aligned}$$

⑤ Η κατανομή Bin(n,p) ⟶ S_n

$n=4$ Αποτελέσματα:

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,x_3,x_4) = &(0,0,0,0) \xrightarrow{\text{πιθ.}} (1-p)^4 \\ &(1,0,0,0) \xrightarrow{\text{πιθ}} p(1-p)^3 \\ &\underbrace{(0,1,0,0) \xrightarrow{\text{πιθ}} p(1-p)^3 \\ &\quad \ldots}_{16 \text{ αποτελέσματα}} \end{aligned}$$

$$P(S_4=2)=P(\{(1100),(1010),\ldots,(0011)\})=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2$$

Γενικά n δοκιμές:

$P(S_n=x)=P$ (όλα τα αποτελέσματα $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$) $x=0,1,\ldots,n$

$x_i\in(0,1)$ του $\sum_{i=1}^{n} x_i=x$

Άρα

$$P(S_n=x)=\binom{n}{x}p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

$x=0,1,\ldots,n$

- κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα $p^x(1-p)^{n-x}$
- # αποτελ. με x επιτυχ. $=\binom{n}{x}=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

$$E[S_n] = \sum_x x P(S_n = x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

1η Μέθοδος

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1} \quad , x \neq 0$$

$$E[S_n] = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n}{x} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{\underbrace{x-1}_{=k}} p^x (1-p)^{n-k-1}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}$$

$$= n \cdot p (1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \overset{*}{=} n \cdot p (1-p)^{n-1} \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np$$

$*$ Διωνυμικό Θεώρημα $\quad (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$

2η Μέθοδος

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x = (1+t)^n \xrightarrow{d/dt} \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} t^{x-1} = n \cdot (1+t)^{n-1} \quad *$$

Έχω $\quad E[S_n] = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$$= p \cdot (1-p)^n \cdot \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^{x-1} \frac{1}{(1-p)^x}$$

$$= \frac{p(1-p)^n}{(1-p)} \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^{x-1} \frac{1}{(1-p)^{x-1}} =$$

$$= p(1-p)^{n-1} \cdot \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{x-1} = p(1-p)^{n-1} n \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np$$

$$Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2$$

$$E[S_n^2] = \sum_x x^2 P[S_n = x] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

1η Μέθοδος

$$\binom{n}{x} = \frac{n}{x}\binom{n-1}{x-1}, \quad x \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$E[S_n^2] = \sum_{x=1}^{n} x^{\cancel{2}} \frac{n}{\cancel{x}} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{x=1}^{n} x \binom{n-1}{\underbrace{x-1}_{=k}} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \underbrace{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{\text{σ.π. της Bin }(n-1,p) \text{ για } k \text{ επιτυχίες}}$$

$$= n \cdot p \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{(n-1)p} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}}_{=1} \right)$$

$$= np\left((n-1)p + 1\right) = n \cdot (n-1) p^2 + np$$

$$Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$$
$$= np(1-p)$$

2η Μέθοδος (Διπλή παραγώγιση.)

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} t^x \xrightarrow{d^2/dt^2} \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} t^{x-2} \qquad \text{κ.λ.π.}$$

⑥ Η κατανομή Geom(p) $\longrightarrow T_1$

$X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία δοκιμών Bernoulli

$T_1 = \#$ δοκιμών ως την 1^{η} επιτυχία

$$P[T_1 = x] = P[X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots X_{x-1} = 0, X_x = 1]$$

$$= (1-p)^{x-1} p \qquad x = 1, 2, 3 \ldots \text{(οποιοσδήποτε } x \in \mathbb{Z}^+ \text{)}$$

$$E[T_1] = \sum_x x P[T_1 = x]$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p \overset{*}{=} p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$*$ $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t}, \ |t| < 1 \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2}, \ |t| < 1$

$$Var[T_1] = E[T_1^2] - E[T_1]^2$$

$$E[T_1^2] = \sum_x x^2 P[T_1 = x] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-p)^{x-1} p$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} t^x = \frac{1}{1-t} \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \overset{\cdot t}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x t^x = \frac{t}{(1-t)^2} \Longrightarrow$$

$$\overset{d/dt}{\Longrightarrow} \sum_{x=1}^{\infty} x^2 t^{x-1} = \frac{1 \cdot (1-t)^2 + t \cdot 2(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1+t}{(1-t)^3}$$

Άρα $\displaystyle E[T_1^2] = p \cdot \frac{1+1-p}{(1-(1-p))^3} = \frac{2-p}{p^2}$

$$Var[T_1] = E[T_1^2] - E[T_1]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Συνοψίζοντας:

$$P[T_1=x]=(1-p)^{x-1}p \quad , x=1,2,\dots$$

$$E[T_1]=\frac{1}{p}$$

$$Var[T_1]=\frac{1-p}{p^2}$$