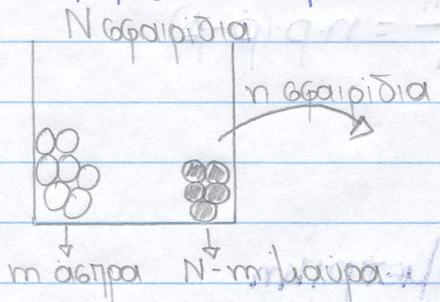
27/3/13

Διακριτές Κατανομές - Ασκήσεις

1. Υπεργεωμετρική Κατανομή - Διωνυμική Κατανομή



1η Περίπτωση: Με επανάθεση

$X = \#$ άσπρων σφαιριδίων

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \frac{m}{N})$

$X_i = \begin{cases} 1, \text{το } i \text{ σφαιρίδιο λευκό} \\ 0, \text{το } i \text{ σφαιρίδιο μαύρο} \end{cases}$

ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{m}{N}$

2η Περίπτωση: Χωρίς επανάθεση

$X = \#$ άσπρων σφαιριδίων

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Hypergeom(n, N, m)$

όχι ανεξάρτητα

$$P(X=i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le i \le n$$

Μέση Τιμή - Διασπορά

1η Περίπτωση: Με επανάθεση

$X \sim Bin(n, \underbrace{\tfrac{m}{N}}_{p})$, $E[X] = n \cdot \frac{m}{N} = n \cdot p$

$Var[X] = n \frac{m}{N} \cdot \frac{N-m}{N} = n \cdot p \cdot (1-p)$

2η Περίπτωση: Χωρίς επανάθεση

Κλειδί για υπολογισμούς στην υπεργεωμετρική

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{r}{i}\binom{s}{n-i} \rightarrow \text{Τύπος Cauchy}$$

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \xlongequal[\text{Cauchy}]{\text{από}} \frac{\binom{\cancel{m}+N-\cancel{m}}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

$$E[X] = \sum_i i P(X=i) = \frac{\sum_{i=\cancel{0}\,1} i \binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} i \frac{m}{i}\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{n} \binom{m-1}{\underbrace{i-1}_{k}}\binom{N-m}{n-i}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m-1}{k}\binom{N-m}{n-1-k} \xlongequal{\text{Cauchy}} \frac{m}{\binom{N}{n}}\binom{\cancel{m}-1+N-\cancel{m}}{n-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{m\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{m\cancel{\binom{N-1}{n-1}}}{\frac{N}{n}\cancel{\binom{N-1}{n-1}}} = n\frac{m}{N}$$

ίδιο με την 1η

$$Var[X] = n\frac{m}{N}\cdot\frac{N-m}{N}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

- Για $n=1$

1η Περιπτωση ≡ 2η Περιπτωση

- Για $n=N$

2η περιπτωση : $Var[X]=0$, $E[X]=m$

2. Αθροισματα - Σειρές για υπολογισμους Μέσων τιμών

(i) Uniform $(\{1,2,\dots n\})$ $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) Bin(n,p) $\longrightarrow$ $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}t^i = (1+t)^n$

(iii) Geom(p), NegBin(n,p) $\longrightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

(iv) Poisson(λ) $\longrightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!} = e^t$

(v) HyperGeom(n,N,m) $\longrightarrow$ $\sum_{i=0}^{n}\binom{r}{i}\binom{s}{n-i} = \binom{r+s}{n}$ Cauchy

S.O.S.

3. Άσκηση

X διακριτή κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=i)=c(1+i)$
$i=0,1,\dots,n$

(i) $c=;$

(ii) $E[X]=;$

(iii) $Var[X]=;$

(iv) $P(X=1|X\leq 2)=;$

(i) $\sum_{i=0}^{n} P(X=i)=1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c(1+i)=1 \Rightarrow c\sum_{i=0}^{n}(1+i)=1$

$$\Rightarrow c\left(n+1+\sum_{i=0}^{n} i\right)=1$$

$$\Rightarrow c\left(n+1+\frac{n(n+1)}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c(n+1)\left(1+\frac{n}{2}\right)=1$$

$$\Rightarrow c=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

(ii) $E[X]=\sum iP(X=i)=\sum_{i=0}^{n} i\,\frac{2(i+1)}{(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{i=0}^{n} i^2+\sum_{i=0}^{n} i\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

(iii) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

↳ γνωστό από το (ii)

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{n} i^2 \frac{2(i+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{i=0}^{n} i^3 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \right) = \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 \to \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{i=0}^{n} i^2 \to \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(iv) $$P(X=1 \mid X \leq 2) = \frac{P(X=1, X\leq 2)}{P(X\leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)}$$

$$= \frac{\frac{2(1+1)}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2}{(n+1)(n+2)}(0+1+1+1+2+1)}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. Άσκηση

Εταιρεία κατασκευής λαμπτήρων

P(ελαττωματικός λαμπτήρας) = 1%

Συσκευασία 10 λαμπτήρων.

Αν μια συσκευασία περιέχει περισσότερους από 1 ελαττωματικούς λαμπτήρες τότε αντικαθίσταται.

Ποσοστό των συσκευασιών που θα αντικατασταθούν

⇓

Πιθανότητα μια συσκευασία να αντικατασταθεί

⇓

Πιθανότητα σε 10 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli να έχω τουλάχιστον 2 επιτυχίες.

(λαμπτήρας → ελαττωματικός επιτυχία
λαμπτήρας → όχι ελαττωματικός αποτυχία

$X=$ # ελαττωματικών σε μια συσκευασία $\sim Bin(10, 0.01)$

$$\sum_{i=2}^{10} \binom{10}{i} 0.01^{i} \cdot 0.99^{10-i} = 1-0.99^{10} - 10 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{9}$$

συμπληρωματικό

5. Άσκηση

Κινητήρες που χρησιμοποιούνται σε 2-κινητήρια ή σε 4-κινητήρια αεροσκάφη

Πιθανότητα βλάβης κινητήρα κατά την πτήση $= p$
Το αεροπλάνο δεν πέφτει όταν λειτουργούν πάνω από τους μισούς κινητήρες → (ι)

Ποιο είναι πιο ασφαλές: ένα 2-κινητήριο ή ένα 4-κινητήριο

$P_{2\text{-πτώσης}} = P($# λειτουργούντων κινητήρων να είναι μικρότερος του 1$) \to X_2$

$$X_2 \sim Bin(2, 1-p) = P(X_2=0) = \binom{2}{0}(1-p)^{0} p^{2-0}$$

$$= p^2$$

$P_{4\text{-πτώσης}} = P($# λειτουργούντων κινητήρων να είναι μικρότερος του 2$) \to X_4 \leq 1$

$$X_4 \sim Bin(4, 1-p) = P(X_4=0) = \binom{4}{0}(1-p)^{0} p^{4} + \binom{4}{1}(1-p)^{1} \cdot p^3$$

$$= p^4 + 4(1-p)p^3$$

Το 2-κινητήριο είναι πιο ασφαλές απ' το 4-κινητήριο $\Longleftrightarrow$

$$P_{4-\text{πτώσης}} > P_{2-\text{πτώσης}} \Longleftrightarrow p^4 + 4(1-p)p^3 > p^2$$

$$\Longleftrightarrow p^2 + 4(1-p)p > 1$$
$$\Longleftrightarrow p^2 + 4p - 4p^2 - 1 > 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{3} < p < 1$$

6. Άσκηση

Έχουμε N πούλμαν χωρητικότητας από 1 έως m.
N_i = # πούλμαν χωρητικότητας i

$$\sum_{i=1}^{m} N_i = N \rightarrow \text{συνολικό πλήθος πούλμαν}$$

Πείραμα Τύχης 1: Διαλέγω τυχαία οδηγό.

$P_1(i) = P($ο οδηγός είναι σε πούλμαν μεγέθους $i)$

Πείραμα Τύχης 2: Διαλέγω τυχαία άνθρωπο.

$P_2(i) = P($ο άνθρωπος είναι σε πούλμαν μεγέθους $i)$.

$$P_1(i) = \frac{N_i}{N} \rightarrow \text{ποσοστό των πούλμαν μεγέθους } i$$

ή

$$= \frac{N_i}{\sum_{i=1}^{m} N_i}$$

Πιθανότητα ένα πούλμαν να έχει μέγεθος i

$$P_2(i) = \frac{i N_i}{\sum_{i=1}^{m} i N_i}$$