29/3/13

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

Μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται (απόλυτα) συνεχής αν υπάρχει f: συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της X:

(i) $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$
(ii) $P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$

2. Ιδιότητες της σ.π.π.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
(δεν μας νοιάζει το διάστημα αν είναι κλειστό, ανοιχτό, ημίκλειστο)

3. $P(X = x) = 0$

4. Η σ.π.π. μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες από το 1.

5. $P(x < X < x+\delta x)\ \int_x^{x+\delta x} f(u)\,du \overset{f:\ \text{συνεχής}}{\simeq} f(x)\cdot\delta x,\ \delta x \to 0^+$ (μικρό)

$$f(x) \simeq \frac{P(x < X < x+\delta x)}{\delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+\delta x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0^+} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x}$$

π.χ.

X τυχαία συνεχής μεταβλητή με $f(8)=3$

$P(8 \le X \le 8.01) \simeq f(8) \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 0.01 = 0.03$

6. Σχέση συνάρτησης κατανομής και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

σ.κ. $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

σ.π.π. $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

3. Μέση Τιμή - Διασπορά συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x)$

Ορίζουμε

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \quad , \text{όταν } \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) < \infty$$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$\sigma_X = S.D.[X] = \sqrt{Var[X]}$$

↳ τυπική απόκλιση

4. Ιδιότητες

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

ii) $E[aX+b] = aE[X]+b$

(iii) $Var[aX+b] = a^2 Var[X]$

(iv) $SD[aX+b] = |a| SD[X]$

(v) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

5. Εναλλακτικός υπολογισμός της μέσης τιμής για συνεχείς μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές

$(f_X(x)=0, x<0)$

• X συνεχής μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$ τότε $E[X] = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty (\underbrace{1-F_X(x)}_{\bar{F}_X(x)})dx$

συνάρτηση επιβίωσης ή συνάρτηση αξιοπιστίας.

Απόδειξη

$$E[X] \overset{\text{ορσ.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \overset{X\geq 0}{=} \int_0^\infty x f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \int_0^x du\, f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \boxed{\int_u^\infty f_X(x)dx}\, du$$

ολοκλήρωμα από u και πάνω

$P(X \geq u) = 1 - F_X(u)$

S.O.S.

6. Άσκηση

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c \cdot x(3-x) & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

άγνωστη σταθερά

(i) $c=$;

(ii) $E[X]=$;

(iii) $Var[X]=$;

(iv) $P(X \geq 1 / X \in [-1,2])=$;

(v) $P(X \geq 1 / X \in [0,4])=$;

(i) $f_X(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R} \Rightarrow c \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 c \cdot x(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_0^3 (3x-x^2)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow c\left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{3} = 1$$

$$\Rightarrow c\left(3\frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{6}{27}}$$

(ii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^3 \frac{6}{27} x^2 (3-x)\,dx$$

$$= \ldots$$

(iii) $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 \rightarrow$ γνωστό από (ii)

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^3 \frac{6}{27} x^3 (3-x)\,dx = \ldots$$

(iv) $$P(X \geq 1 / X \in [-1,2]) = \frac{P(1 \le X \le 2)}{P(-1 \le X \le 2)} = \frac{\int_1^2 \frac{6}{27} x(3-x)\,dx}{\int_0^2 \frac{6}{27} x(3-x)\,dx} = \ldots$$

(γ) $P(X \geq 1 / X \in [0,4]) = \dfrac{P(1 \leq X \leq 4)}{P(0 \leq X \leq 4) = 1} = P(1 \leq X \leq 4)$

$$= \int_1^4 f_X(x)\,dx = \int_1^3 \frac{6}{27} x(3-x)\,dx + \cancel{\int_3^4 0\,dx} = \ldots$$

S.O.S.

7. Άσκηση

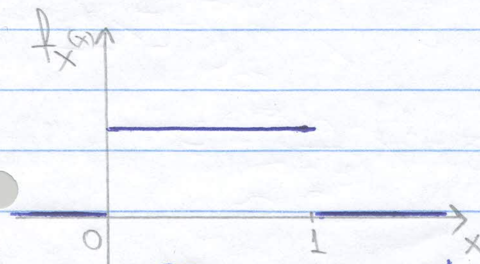
X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$Y = X^2$, $Z = e^X$

σ.κ. $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $F_Z(z)$

σ.π.π. $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_Z(z)$

$E[X]$, $E[Y]$, $E[Z]$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x du = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$Z = e^X \quad F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(e^X \leq z) = P(X \leq \ln z)$

$$= F_X(\ln z) = \begin{cases} 0, & \ln z < 0 \\ \ln z, & 0 \leq \ln z \leq 1 \\ 1, & \ln z > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \ln z, & 1 \leq z \leq 1 \\ 1, & z > e \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in [1, e] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(Η πυκνότητα δεν είναι μοναδική)

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_1^e \cancel{z} \cdot \frac{1}{\cancel{z}}\, dz = e - 1$$

ή

$$E[Z] = \int_0^{\infty} (1 - F_Z(z))\, dz = \int_0^1 1\, dz + \int_1^e \ln z\, dz = \ldots$$

ή

$$E[Z] = E[\overset{g(x)}{e^x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$