1/4/13

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

1. Γραμμική συνάρτηση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

X συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.κ. $F_X(x)$ και σ.π.π. $f_X(x)$

$Y = aX + b$, $F_Y(y) = ;$ $\quad E[X] = aE[X] + b$

$f_Y(y) = ;$ $\quad Var[X] = a^2 Var[X]$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX + b \le y) = P(aX \le y - b) = \begin{cases} P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}, & a>0 \\ -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a}, & a<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}$$

2. Η ομοιόμορφη κατανομή στο $[a,b]$

$Unif([a,b])$ Πείραμα Τύχης: Επιλογή σημείου στο $[a,b]$

X: σημείο Επιλογής

$$\text{σ.π.π. } f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_X(x) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_a^b c\,dx = 1 \Rightarrow c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

$$X \sim \text{Uniform}([0,1])$$
$$\Downarrow a<b$$
$$Y = (b-a)X + a \sim \text{Uniform}([a,b])$$

$\Rightarrow$ Παραμένει ομοιόμορφη αλλά αλλάζει το διάστημα

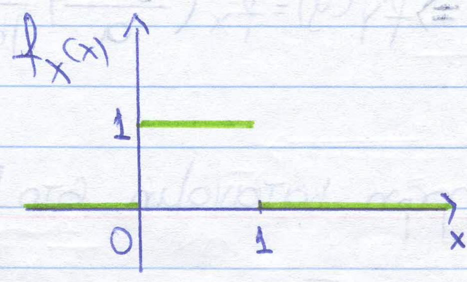
Απόδειξη

$$X \sim \text{Uniform}([0,1]) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

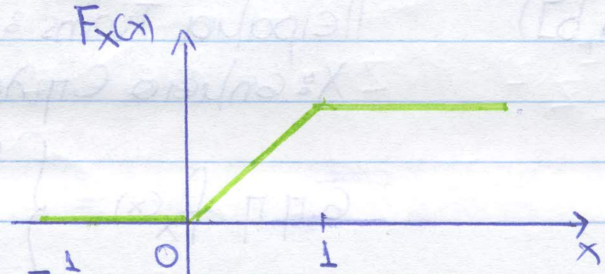
$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{|b-a|} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & y \in (a,b) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έστω $X \sim \text{Uniform}([0,1])$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{3}, \quad \text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Αν $Y \sim Uniform([a,b])$

$$Var[Y] = (b-a)^2 Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E[Y] = (b-a)E[X] + a = \frac{a+b}{2}$$

3. Η εκθετική κατανομή

Πείραμα: χρόνος ζωής εξαρτήματος (χωρίς γήρανση)

$$\lambda_X(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t < X \le t+\delta t \mid X > t)}{\delta t} = \boxed{\lim_{\delta t \to 0^+} \frac{\overbrace{P(t<X\le t+\delta t)}^{=f_X(x)}}{\delta t}} \frac{1}{P(X>t)=1-F_X(t)}$$

↳ Ρυθμός βλάβης ή θανάτου μιας τυχαίας μεταβλητής $X \geq 0$ τη στιγμή t

Αν θέλουμε X τυχαία μεταβλητή με $\lambda_X(t) = \lambda$ σταθερό

$$\lambda_X(t) = \lambda \iff \frac{f_X(t)}{P(X>t)} = \lambda$$

Εστω $g(t) = P(X>t)$

$\lambda_X(t) = \lambda$

$g(t) = 1 - F_X(t)$

$g'(t) = -f_X(t)$

$$\iff \frac{-g'(t)}{g(t)} = \lambda$$

$$\iff \frac{g'(t)}{g(t)} = -\lambda$$

$$\iff \frac{d}{dt}(\ln g(t)) = -\lambda$$

$$\iff \ln g(t) - \cancel{\ln g(0)} = -\lambda t$$

$$\iff \ln g(t) = -\lambda t$$

$$\iff g(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

Αν Χ: χρόνος ζωής χωρίς γήρανση με ρυθμό βλάβης (θανάτου) λ.

τότε $P(X>t) = e^{-\lambda t}$, $t>0$.

$$F_X(t) = \underbrace{1-e^{-\lambda t}}_{t>0} = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

→ εκθετική με παράμετρο λ

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορισμός

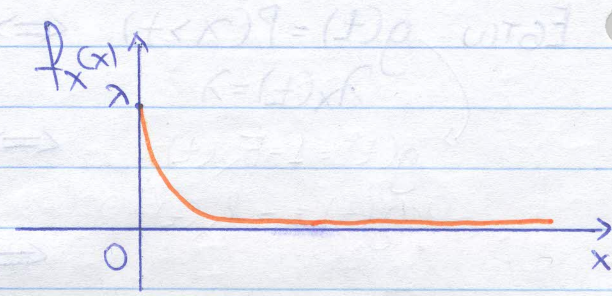
Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με σ.κ. $F_X(\lambda) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

και σ.π.π. $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ λέγεται εκθετική με

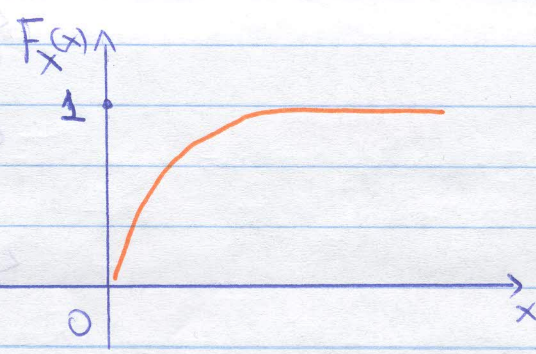
παράμετρο λ (exp(λ)).

$X \sim exp(\lambda)$

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$



$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x^n (-e^{-\lambda x})' dx$$

$$= \left[x^n e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^\infty + \int_0^\infty n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{n}{\lambda} \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \dots = \frac{n!}{\lambda^n}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{1}{\lambda^2}$$

Ιδιοτητα αλλαγης κλιμακας

$$X \sim exp(\lambda),\ a>0 \Rightarrow aX \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Αποδειξη

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} \Longrightarrow f_{aX}(y) = f_X\left(\frac{y}{a}\right)\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow f_X(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda/a\, y} & , y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αμνήμονη Ιδιότητα

(έχει ζήσει s, να ζήσει άλλο t)

$$X \sim exp(\lambda) \Rightarrow P(X > s+t \mid X>s) = P(X>t) \quad , s,t>0$$

Πράγματι, $P(X > s+t \mid X>s) = \dfrac{P(X>s+t, X>s)}{P(X>s)} = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}$

$$= e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

4. Η κατανομή Γάμμα

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή μη-αρνητική X με

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

με $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$ λέγεται τυχαία μεταβλητή με κατανομή Gamma (a,λ)

$a=1 \Rightarrow \text{Gamma}(1,\lambda) \equiv \exp(\lambda)$

$a=n \in \{1,2,\dots\} \Rightarrow \text{Gamma}(n,\lambda) \equiv \text{Erlang}(n,\lambda)$

$f_X(x) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x>0$

$X \sim \text{Gamma}(a,\lambda) \Rightarrow E[X] = \dfrac{a}{\lambda}, \quad Var[X] = \dfrac{a}{\lambda^2}$

$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

5. Η κανονική κατανομή