3/4/13

Ειδικές Συνεχείς Κατανομές

Κανονική Κατανομή

1. Ορισμός

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$
λέγεται κανονική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\mu\, \sigma^2$ ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

$F_X(x)$

Αν $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τότε για μεγάλα n, η τυχαία μεταβλητή $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ έχει κατανομή που προσεγγίζεται από την κανονική

Η $f_X(x)$ είναι πράγματι σ.π.π.

(i) $f_X(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{\Rightarrow} \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \cancel{\sigma}\, dy$

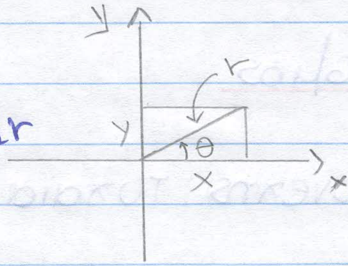
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Αρκει να δειξουμε ότι $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\sqrt{2\pi}$

Πράγματι $I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr$$



$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = r \qquad x=r\,\sigma\upsilon\nu\theta \quad y=r\,\eta\mu\theta$$

$$=2\pi\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_{r=0}^{\infty}=2\pi$$

2. Γραμμική συνάρτηση κανονικής τυχαίας μεταβλητής

Θεώρημα

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R} \Rightarrow aX+b\sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$

Απόδειξη

Γενικά X συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$ τότε η $Y=aX+b$ συνεχής με σ.π.π. $f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}$

Εδώ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ οπότε $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in\mathbb{R}$

Άρα $Y=aX+b$, $f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}=$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{(y-b)}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$$

3. Τυποποίηση μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}} \sim N(0,1)$$

$\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma} = Z \rightarrow$ Τυποποιημένη κανονική κατανομή

Επίσης $Z \sim N(0,1) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

$Z \sim N(0,1)$ Τυποποιημένη κανονική κατανομή

σ.π.π $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

σ.κ. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbb{R}$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{x=-\infty}^{\infty} = 0$$

↳ περιττή σε συμμετρικό διάστημα, άρα 0.

$$Var[Z] = E[Z^2] - \cancel{E[Z]}^2 = E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

$\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = 1$

4. Μέση Τιμή και Διασπορά $N(\mu, \sigma^2)$

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow E[Z] = 0$$
$$Var[Z] = 1$$

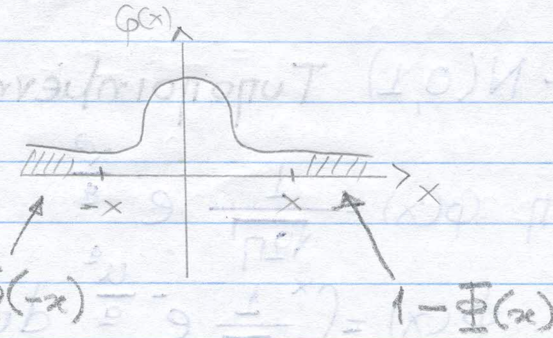
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$$

$$E[X] = \sigma \underbrace{E[Z]}_{0} + \mu = \mu$$
$$Var[X] = \sigma^2 \underbrace{Var[Z]}_{1} = \sigma^2$$

5. Υπολογισμοί στην Τυποποιημένη κανονική

6.Π.Π. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\,du$$



$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Πίνακες της $\Phi(x)$, $0 \le x \le 3$

$\Phi(3) = 0.999$

$\Phi(x) \simeq 1, \quad x \geq 3$

$\Phi(0) = \frac{1}{2}$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

6. Υπολογισμοί στην $N(\mu, \sigma^2)$

Άσκηση

$X \sim N(\underset{\to \mu}{3}, \underset{\to \sigma^2}{9})$

(i) $E[X]$
(ii) $Var[X]$
(iii) $P(2 \le X \le 5)$
(iv) $P(X=5)$
(v) $P(X>0)$
(vi) $P(|X-3|>6)$

(i) $E[X] = \mu = 3$

(ii) $Var[X] = \sigma^2 = 9$

(iii) $X \sim N(3,9) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-3}{3} \sim N(0,1)$

$$P(2<X<5) = P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{1}{3}\right)}_{1-\Phi(0.33)}$$
$$\simeq \Phi(0.66) - 1 + \Phi(0.33)$$
$$= 0.3779$$

(iv) $P(X=5) = 0$

(v) $P(X>0) = P\left(\underbrace{\frac{X-3}{3}}_{Z \sim N(0,1)} > -\frac{3}{3}\right) = P(Z>-1) = 1-\Phi(-1) = \Phi(1) = 0.841$

(vi) $P(|X-3|>6) = P\left(\left|\frac{X-3}{3}\right| > \frac{6}{3}\right) = P(|Z|>2)$
$$= P(Z>2) + P(Z<-2)$$
$$= 1-\Phi(2) + \underbrace{\Phi(-2)}_{1-\Phi(2)}$$
$$= 2(1-\Phi(2))$$
$$= 0.456$$

7. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα De Moivre-Laplace

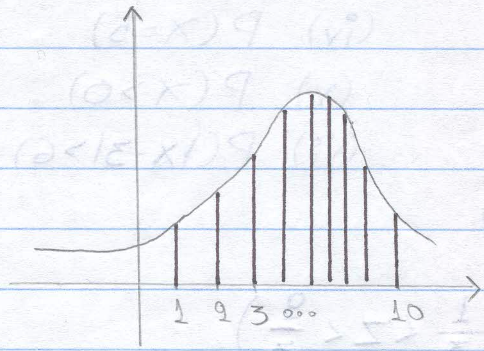
De Moivre (1733)

X = # επιτυχιών σε n δοκιμές Bernoulli με $p=\frac{1}{2}$

$Bin(n, \frac{1}{2})$

$P(X=x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad , 0 \le x \le n$

π.χ.



Για μεγάλα n: $Bin(n, \frac{1}{2}) \simeq N(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$

LaPlace (1812)

$X \sim Bin(n,p) \simeq N(np, np(1-p))$

δηλαδή $P(a \le X \le b) \simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

$$= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$