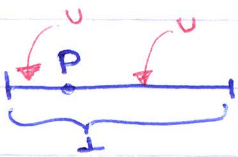
5/4/13 — 19ο Μάθημα

Ασκήσεις σε σ.μ. (Ειδικές κατανομές)

① Άσκηση 1



Ράβδος μήκους 1

P ένα σημείο

Επιλογή τυχαίου σημείου $U \sim \text{Uniform}([0,1])$

Έστω $L_p(U)$ το κομμάτι της ράβδου που περιέχει το P.

Μέσο μήκος κομματιού που περιέχει το p. ($E[L_p(U)]$)

Λύση:

$$L_p(u) = \begin{cases} u, & u \geq p \\ 1-u, & u < p \end{cases}$$

σ.π.π. της $U([0,1])$

$$E[L_p(U)] = \int_{-\infty}^{\infty} L_p(u) f_U(u)\,du$$

$$= \int_0^1 L_p(u)\,du$$

$$= \int_0^p (1-u)\,du + \int_p^1 u\,du$$

$$= \left[u - \frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{p} + \left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=p}^{1} = p - \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2}$$

Άρα

$$E[L_p(U)] = \frac{1}{2} + p(1-p)$$

② Άσκηση 2. Ραντεβού

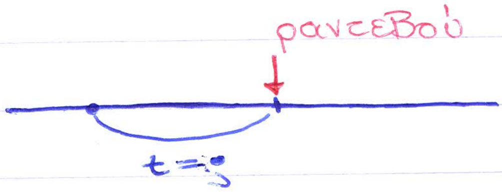
Κόστος για s χρονικές μονάδες:

αν φτάσω νωρίτερα $= cs$

αν φτάσω αργότερα $= ks$

X = χρόνος για να φτάσω στο ραντεβού

t = χρόνος αναχώρησης πριν την ώρα του ραντεβού ώστε να ελαχιστοποιεί το κόστος.



Κόστος $= C_t(X)$

$t^* = ;$ που ελαχιστοποιεί $E[C_t(X)]$

$$C_t(x) = \begin{cases} c(t-x), & t \geq x \\ k(x-t), & t < x \end{cases}$$

$$E[C_t(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} C_t(x) f_X(x)\,dx$$

$X \geq 0$ συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$

σ.κ. $F_X(x)$

$$E[C_t(X)] = \int_0^{\infty} C_t(x) f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^t c(t-x) f_X(x)\,dx + \int_t^{\infty} k(x-t) f_X(x)\,dx$$

$$= ct\int_0^t f_X(x)\,dx - c\int_0^t x f_X(x)\,dx + k\int_t^\infty x f_X(x)\,dx - kt\int_t^\infty f_X(x)\,dx$$

Για να βρω t^* που ελαχιστοποιεί:
Παίρνω:

$$\frac{d}{dt}E[C_t(x)] = 0 \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}E[C_t(x)] > 0$$

$$\frac{d}{dt}E[C_t(x)] = c\cdot F_X(t) + ct\cancel{f_X(t)} - ct\cancel{f_X(t)} - kt\cancel{f_X(t)}$$
$$- k(1-F_X(t)) + kt\cancel{f_X(t)} =$$
$$= (c+k)F_X(t) - k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(t^*) = \frac{k}{c+k}} \quad , \quad \frac{d^2}{dt}E[C_t(x)] \geq 0$$

Εφαρμογή

X = Χρόνος για να φτάσω στο ραντεβού $\sim Exp(1)$
$k = 2c$ $\quad t^* = ;$

$$F_X(t^*) = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 - e^{-t^*} = \frac{2}{3} \Rightarrow e^{-t^*} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^* = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 \Rightarrow t^* = \ln(3) = 1{,}0986$$

③ Άσκηση 3

$X \sim Gamma(a,\lambda) \Leftrightarrow X$ συνεχής τ.μ. με σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx$$

Ν.δ.ο.:

1) $\Gamma(1) = 1$

2) $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

3) $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \{1,2,\ldots\}$

4) $\int_0^\infty f_X(x)\,dx = 1$

5) $E[X^n] = ;$

6) $E[X] = ;$ $Var[X] = ;$

---

1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_{x=0}^{\infty} = 1$

2) $a>1$ $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\,dx = \int_0^\infty x^{a-1}(-e^{-x})'\,dx =$

$$= \underbrace{[-x^{a-1}e^{-x}]_{x=0}^{\infty}}_{0} + \int_0^\infty (a-1)x^{a-2}e^{-x}\,dx$$

$$= (a-1)\Gamma(a-1)$$

3) $n \in \{1,2,\ldots\}$ $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$

$$= (n-1)(n-2)\ldots 1\,\Gamma(1) = (n-1)!$$

4) $$\int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} e^{-\overset{t}{\lambda x}}\,dx =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^a}}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\cancel{\lambda}}\right)^{a-1} e^{-t} \frac{1}{\cancel{\lambda}}\,dt = 1$$

5) $$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^n \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \overbrace{\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\lambda^{(n+a)}}{\Gamma(n+a)} x^{(n+a)-1} e^{-\lambda x}\,dx}_{\sigma.\pi.\pi.\ \text{Gamma}(n+a,\lambda)}}^{=1} \cdot \frac{\Gamma(n+a)}{\lambda^{n+a}}$$

$$\Rightarrow E[X^n] = \frac{\cancel{\lambda^a}\,\Gamma(n+a)}{\Gamma(a) \cdot \lambda^{n+\cancel{a}}} = \frac{(a+n-1)(a+n-2)\cdots a\,\cancel{\Gamma(a)}}{\cancel{\Gamma(a)} \cdot \lambda^n} =$$

ανοδικό παραγοντικό

$$= \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{\lambda^n} = \frac{[a]_n}{\lambda^n}$$

6) $$\left.\begin{aligned} E[X] &= \frac{a}{\lambda} \\ E[X^2] &= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 =$$

$$= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$$

④ Άσκηση

Χρόνος ζωής λαμπτήρων ~ Exp
με μέση τιμή 100 ώρες

Πολύφωτο με 6 λαμπτήρες λειτουργεί για 100 ώρες.

P (στο τέλος των 100 ωρών
να υπάρχουν 2 ακριβώς καμ. λαμπτήρες) = ;

E [καμμένοι λαμπτήρες σε 100 ώρες λειτουργίας] = ;

$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_6}_{\text{ανεξάρτητα}}$: χρόνοι ζωής λαμπτήρων του πολύφωτου

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{, αν ο } i \text{ λαμπτήρας χαλάσει μέσα σε 100 ώρες} \\ 0 & \text{, διαφορετικά} \end{cases}$$

S = # χαλασμένων λαμπτήρων μετά από 100 ώρες $= \sum_{i=1}^{6} I_i$

όπου $\sum_{i=1}^{6} I_i \sim Bin(6, p)$

πιθανότητα ένας λαμπτήρας να είναι καμμένος στις 100 ώρες.

$P(S=2) = ;$

$E(S) = ;$

$$p = P(I_i = 1) = P(\underset{\uparrow\, Exp(\lambda)}{X_i} \le \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{100}) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda \cdot 100}$$

$$100 = E[X_i] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100} \Rightarrow p = 1 - e^{-1}$$

$$P(S=2) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^{6-2} = \binom{6}{2} (1 - e^{-1})^2 e^{-4}$$

$$E[S] = np = 6 \cdot (1 - e^{-1})$$