10/4/13 21ο Μάθημα

Δεσμευμένες σ.π. κ' σ.π.π.
Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

① Δεσμευμένη σ.π. για διακριτές τ.μ.

(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,\ Y=y)$

ορισμός

Ορίζουμε για κάθε y, $P_Y(y)>0$

$$P_{X|Y}(x|y)=\frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}=P(X=x\,|\,Y=y)$$

ως συνάρτηση του x τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X δοθέντος ότι $Y=y$.

Για κάθε σταθερό y, $P_Y(y)>0$ η $P_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει τις ιδιότητες της σ.π.

$$P_{X|Y}(x|y)\geq 0 \quad \forall x$$

$$\sum_x P_{X|Y}(x|y)=1$$

ΟΜΟΙΑ $\quad P_{Y|X}(y|x)=\dfrac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)}$ κ.λ.π.

② Ανεξάρτητες Διακριτές τ.μ.

Έστω (X,Y) διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$ και περιθώριες σ.π. $P_X(x)$, $P_Y(y)$

X,Y ανεξάρτητες $\iff P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$

$\iff P_{Y|X}(y|x)=P_Y(y)$

$\iff P_{X|Y}(x|y)=P_X(x)$

$\iff P(X\in A,\ Y\in B)=P(X\in A)\,P(Y\in B)$

Αντίστοιχα:

$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(A|B)=P(A)$

$P(B|A)=P(B)$

③ Δεσμευμένες σ.π.π. συνεχών τ.μ.

(X, Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$
και περιθώριες σ.π.π.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Ορίζουμε $\forall y$ με $f_Y(y) > 0$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ δεσμευμένη σ.π.π. της X δοθέντος $Y=y$

Ιδιότητες

$$f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

X, Y ανεξάρτητα $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Leftrightarrow f_{X,Y}(x|y) = f_X(x)$

$\Leftrightarrow f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$

$\Leftrightarrow P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\,P(Y \in B)$

④ Δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) τ.μ.

(X,Y) τ.μ.

ΔΙΑΚΡΙΤΗ — ΣΥΝΕΧΗΣ

$$F_{X|Y}(x|y) = \sum_{x' \le x} \overbrace{P_{X|Y}(x'|y)}^{P(X\le x \mid Y=y)}$$

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x'|y)\,dx'$$

Δεσμευμένη σ.κ. της X δοθ. ότι $Y=y$.

X,Y ανεξάρτητα $\Longleftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$

$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$

$F_{X,Y}(x,y) =$

$P_{X,Y}(x,y) =$ "πολλαπλασίασε"

$f_{X,Y}(x,y) =$

(6) Βασικό κριτήριο ανεξαρτησίας

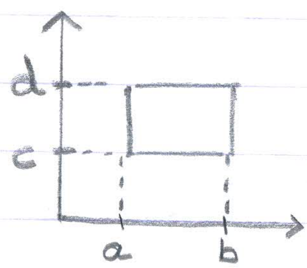
(X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$P_{X,Y}(x,y) = f(x)\cdot g(y) \iff X,Y$ ανεξάρτητες

(X,Y) συνάρτηση με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$f_{X,Y}(x,y) = f(x)\cdot g(y) \iff X,Y$ ανεξάρτητες.

(7) Παράδειγμα 1



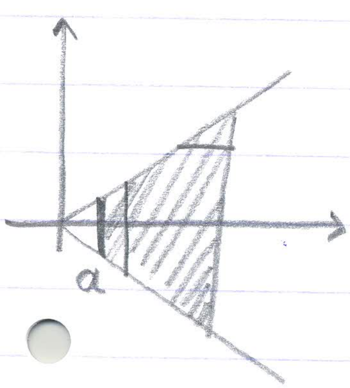
X,Y συνεχής με σ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c_1 x^2 y, & a \le x \le b \text{ και } c \le y \le d \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = c_1 x^2 y\, 1(x\in[a,b],\ y\in[c,d])$$
$$= \underbrace{x^2\cdot 1(x\in[a,b])}_{f(x)}\ \underbrace{c_1 y\, 1(y\in[c,d])}_{g(y)}$$
$$= f(x)\cdot g(y)$$

<u>Άρα</u> X,Y ανεξάρτητα

(8) Παράδειγμα 2

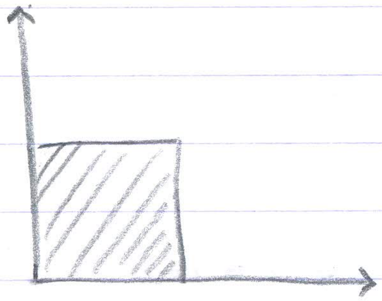


(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & a\le x\le b,\ -x\le y\le x \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$$f_{X,Y}(x,y) = c_1 x^2 y^2\, 1(x\in[a,b],\ y\in[-x,x])$$
$$\ne f(x)\cdot g(y) \quad \text{όχι ανεξάρτητα.}$$

Πρέπει το σύνολο που είναι $\ne 0$ να γράφεται σε καρτεσιανό γινόμενο.

9 Άσκηση



(X,Y) συνεχής τ.δ. με σ.π.π.:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(i) $c = ;$

(ii) $f_X(\cdot) = ;$

(iii) $f_Y(y) = ;$

(iv) $f_{X|Y}(x|y) = ;$

(v) $f_{Y|X}(y|x) = ;$

(vi) $P(X<Y) = ;$

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 cxy\,dx\,dy =$$

$$= c\int_0^1 y \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^1}dy = \frac{c}{2}\underbrace{\int_0^1 y\,dy}_{\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1} = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c=4}$$

(ii) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 4xy\,dy$$

$$= 4x\int_0^1 y\,dx = 2x, \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_X(x) = 0 \quad , x \notin [0,1]$$

(iii) Όμοια

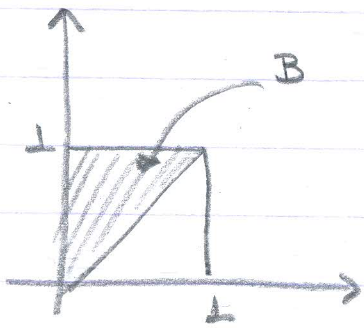
(iv) Η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται μόνο για y $f_Y(y)>0$ Μόνο για $y\in(0,1]$

Άρα για κάθε $y\in[0,1]$
έχουμε την $f_{X|Y}(x|y)$
με τύπο:

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{\overset{2}{\cancel{4}}x\cancel{y}}{\cancel{2}\cancel{y}}=2x & ,x\in[0,1]\\ 0 & ,x\notin[0,1]\end{cases}$$

(v) ΟΜΟΙΑ

(vi) $P(X<Y)=P\big((X,Y)\in\overbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le y\le 1\}}^{B}\big)$

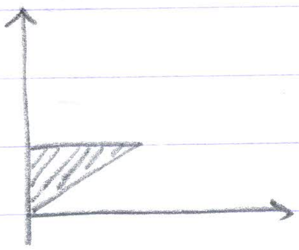


$$=\iint_B f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^1\int_0^y 4xy\,dx\,dy$$

$$=4\int_0^1 y\underbrace{\int_0^y x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{y}}dy=2\underbrace{\int_0^1 y^3\,dy}_{\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{1}}=\frac{1}{2}$$

(10) Άσκηση



(X,Y) συνεχής τ.μ. με δ.π.π.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cxy &, 0\le x\le y\le 1 \\ 0 &, \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(i) $c=;$

(ii) $f_X(x)=;$

(iii) $f_Y(y)=;$

(iv) $f_{X|Y}(x|y)=;$

(v) $f_{Y|X}(y|x)=;$

(vi) $P(X<Y)=;$

(i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^y cxy\,dx\,dy=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\int_0^1 y\underbrace{\int_0^y x\,dx}_{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{y}}dy=1 \Rightarrow \frac{c}{2}\int_0^1 y^3\,dy=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{1}=1 \Rightarrow \frac{c}{8}=1 \Rightarrow c=8$$

(ii) $x\in[0,1]$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_x^1 8xy\,dy$$

$$=8x\int_x^1 y\,dy=8x\,\frac{1-x^2}{2}=4x(1-x^2)$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 4x(1-x^2) &, x\in[0,1] \\ 0 &, \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(iii) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \quad , y \in [0,1]$

$$= \int_0^y 8xy\,dx = 8y \int_0^y x\,dx = 8y\frac{y^2}{2} = 4y^3$$

$y \in [0,1]$

Άρα

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

X, Y όχι ανεξάρτητα γιατί

$$f_{X,Y}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 \neq f_X\left(\frac{2}{3}\right) f_Y\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y^3 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(iv) Η $f_{X|Y}(x|y)$ ορίζεται μόνο για y με $f_Y(y) > 0$ μόνο για $y \in (0,1]$ με δ.π.π.

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & , x \in [0,y] \\ 0 & , x \notin [0,y] \end{cases}$$

$\forall\, y \in (0,1]$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{y^2} & , x \in [0,y] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

9/

(v) <u>ΟΜΟΙΩΣ</u>

$\forall\, x \in (0,1)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{8xy}{4x(1-x^2)} & , y \in [x,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

*

(vi) $P(X<Y) = 1$