12/4/13 22ο Μάθημα

Πολυδιάστατες τ.μ. – κατανομές Αθροισμάτων τ.μ.

① ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ και $\{\omega : X_1(\omega) \le x_1, \ldots, X_n(\omega) \le x_n\} \in A \ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

τότε η $(X_1, \ldots, X_n)$ λέγεται η-διάστατη τ.μ. *

Από κοινού σ.κ. της $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ είναι

$$F_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Όμοια με την περίπτωση $n = 2$, ορίζονται διακριτές σ.π.:

$$P_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

συνεχείς σ.π.π. $f_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(x_1, \ldots, x_n)$

ορισμός

$X_1, X_2, \ldots X_n$ ανεξάρτητα $\iff P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \ldots P(X_n \in A_n)$

$, \forall \ A_1, A_2, \ldots, A_n \in A$

② ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ Τ.Μ.

X, Y διακριτές τ.μ. με σ.π. $P_{x,y}(x,y) \Rightarrow Z = X + Y$ διακριτή με σ.π.

$$P_Z(z) = P(Z = z) = P(X + Y = z) =$$
$$= \sum_x P(X = x, Y = z - x)$$
$$= \sum_x P_{x,y}(x, z - x)$$
$$= \sum_y P_{x,y}(z - y, y)$$

Σε κάποια προβλήματα αντί της $P_{x,y}(x,y)$ έχουμε

$P_x(x), P_y(y), P_{x/y}(x/y), P_{y/x}(y/x)$ τότε:

$$P_Z(z) = \sum_x \underbrace{P_x(x) P_{y/x}(\overset{z-x}{y}/x)}_{\substack{P_{x,y}(x,y) \\ P_{x,y}(x, z-x)}} = \sum_x P(X = x) \underbrace{P(Z = z / X = x)}_{\substack{\| \\ P(Y = z - x / X = x)}}$$

③ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ Τ.Μ.

X, Y συνεχείς τ.μ. με δ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) \Rightarrow Z = X+Y$ συνεχείς με δ.π.π.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy$$

④ Παράδειγμα

X, Y ανεξ. συνεχείς Uniform $([0,1])$
$Z = X+Y$ συνεχείς
δ.π.π. $f_Z(z) = ;$ $\quad z \in [0,2]$

$f_Z(z) = 0 \quad z \notin [0,2]$

Για $z \in [0,2]$: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Όμως,

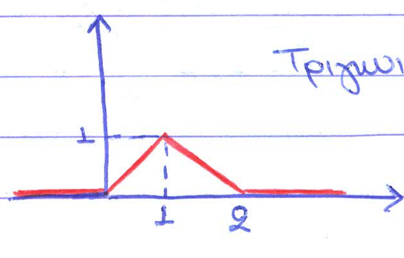
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , x \notin [0,1] \end{cases}$$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$
$0 \le z-x \le 1 \quad z-1 \le x \le z$

Άρα $\quad f_Z(z) = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} 1\,dx$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \min(1,z) - \max(0,z-1) & ; z \in [0,2] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-0 & , z \in [0,1] \\ 1-(z-1) = 2-z & , z \in [1,2] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Τριγωνική δ.π.π.

5 Παράδειγμα

X, Y διακριτές τ.μ. ανεξάρτητες
$X \sim Poisson(\lambda)$
$Y \sim Poisson(\mu)$

δ.π. $f_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$

$Z = X + Y \qquad f_Z(z)$ σπ. $\qquad f_{X/Z}(x/z)$

Για $z = 0, 1, 2, \dots$

$$f_Z(z) = P(Z = z) = \sum_x \underbrace{P(X = x, Y = z - x)}_{f_{X,Y}(x, z-x)}$$

$$\overset{X,Y \text{ ανεξ.}}{=} \sum_x P(X = x) P(Y = z - x)$$

$$= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\mu^z}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x \rightarrow \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^z$$

Για $z = 0, 1, 2, \dots$

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}, \quad z = 0, 1, \dots$$

Δηλ. $\qquad Z \sim Poisson(\lambda + \mu)$

⑥ Παράδειγμα

Η $f_{X/Z}(x/z)$ ορίζεται μόνο για z με $f_Z(z)>0$
δηλ. για $z=0,1,2,\dots$

Ως συνάρτηση του x

$$f_{X/Z}(x/z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{P(\overbrace{X=x, Y=z-x}^{X=x \quad Z=z})}{P(Z=z)}$$

$$= \frac{P(X=x)\,P(Y=z-x)}{P(Z=z)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\mu}\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}}$$

$$f_{X/Z} = \binom{z}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}, \quad x=0,1,\dots,z$$

$$(X/Z=z) \sim Bin\left(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

7 Παράδειγμα

$X \sim Gamma(a,\lambda)$ ανεξάρτητες.
$Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$.

σ.π.π. $f_X(x) = \dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, \; x>0$

$$f_Y(y) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\lambda y}, \; y>0$$

$Z = X+Y$ σ.π.π. $f_Z(z) = ;$

ΛΥΣΗ

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx =$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)}\,dx$$

$$= c\, e^{-\lambda z} \int_0^z x^{a-1}(z-x)^{\beta-1}\,dx \qquad c \text{ σταθερό}$$

$$\overset{u=x/z}{=} c\, e^{-\lambda x} \int_0^1 (uz)^{a-1}(z-uz)^{\beta-1} z\,du$$

$$= c\, z^{a+\beta-1} e^{-\lambda z} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{\beta-1}\,du$$

$$= c'\, z^{a+\beta-1} e^{-\lambda z}, \; z>0$$

Για την $Gamma(a+\beta,\lambda)$ γνωρίζουμε ότι έχει σ.π.π.

$$\frac{\lambda^{a+\beta}}{\Gamma(a+\beta)} z^{a+\beta-1} e^{-\lambda z}, \; z>0$$

Άρα αναγκαστικά $c' = \dfrac{\lambda^{a+\beta}}{\Gamma(a+\beta)}$ και $Z \sim Gamma(a+\beta,\lambda)$

8 Αναγεννητικές Ιδιότητες

1) $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Bin(m+n,p)$

2) $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

3) $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m,p)$

4) $X \sim Gamma(a,\lambda)$, $Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Gamma(a+\beta,\lambda)$

5) $X \sim Exp(\lambda)$, $Y \sim Exp(\lambda)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Gamma(2,\lambda)$

6) $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ανεξάρτ. $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$