15/4/13

Μέση Τιμή - Ιδιότητες

1. Υπενθυμίσεις

$$E[X] = \begin{cases} \sum_x x P_X(x) & , X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx & , X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

- $E[aX+b] = aE[X]+b$

$$g(E[X]) \neq E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_X(x) & , X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx & , X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

2. Ιδιότητες

(i) $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$

ii) $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$

Απόδειξη

$$a \leq X \leq b \Rightarrow \begin{matrix} X-a \geq 0 \\ b-X \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E[X-a] \geq 0 \\ E[b-X] \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} E[X] \geq a \\ E[X] \leq b \end{matrix}$$

(iii) (X,Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto g(x,y)$

Τότε $E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y) & (X,Y): \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy, & (X,Y): \text{συνεχής} \end{cases}$

Απόδειξη (για (X,Y): διακριτή)

$Z = g(X,Y)$

$$P_Z(z) = P(Z=z) = P(g(X,Y)=z) = \sum_{(x,y): g(x,y)=z} P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{(x,y): g(x,y)=z} P_{X,Y}(x,y)$$

$$E[g(X,Y)] = E[Z] = \sum_z z P_Z(z)$$

$$= \sum_z z \sum_{(x,y): g(x,y)=z} P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_z \sum_{(x,y): g(x,y)=z} z P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_z \sum_{(x,y): g(x,y)=z} g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$$

(iv) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Απόδειξη (για (X,Y): διακριτή)

$$\underbrace{E[X+Y]}_{g(X,Y)} = \sum_x \sum_y (x+y) P_{X,Y}(x,y) = \sum_x \sum_y x P_{X,Y}(x,y) + \sum_x \sum_y y P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x x \underbrace{\boxed{\sum_y P_{X,Y}(x,y)}}_{P_X(x)} + \sum_y y \underbrace{\boxed{\sum_x P_{X,Y}(x,y)}}_{P_Y(y)}$$

$$= E[X] + E[Y]$$

Γενίκευση

$$E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

(v) $E[XY] \neq E[X]\,E[Y]$ γενικά (μπορεί να ισχύει αλλά μόνο σε ειδική περίπτωση)

π.χ. (X,Y) διακριτή με σ.π.

$x \backslash y$	0	1	$P_X(x)$
0	0	1/3	1/3
1	1/2	1/6	2/3
$P_Y(y)$	1/2	1/2	1

$$E[XY] = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} x \cdot y\, P_{X,Y}(x,y) = 1 \cdot 1/6 = 1/6$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{1} x P_X(x) = 1 \cdot 2/3 = 2/3$$

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{1} y P_Y(y) = 1 \cdot 1/2 = 1/2$$

$$E[XY] = 1/6 \neq E[X] \cdot E[Y] = 2/3 \cdot \frac{1}{2} = 1/3$$

(vi) X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[X,Y] = E[X]E[Y]$

"Η συνεπαγωγή δεν πάει ανάποδα" $\not\Leftarrow$

Απόδειξη (για (X,Y): διακριτή)

$$E[X,Y] = \sum_x \sum_y xy P_{X,Y}(x,y) \overset{X,Y:\ \text{ανεξάρτητες}}{=} \sum_x \sum_y xy P_X(x) P_Y(y)$$

$$= \boxed{\sum_x x P_X(x)} \underbrace{\boxed{\sum_y y P_Y(y)}}_{E[Y]} = E[X]E[Y]$$

(vii) Γενίκευση

$X_1, X_2, \ldots, X_n$: ανεξάρτητες $\Rightarrow E[X_1 X_2 \ldots X_n] = E[X_1]E[X_2]\ldots E[X_n]$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i]$$

(viii) $E[X_1 X_2 \ldots X_n] = E[X_1]\ldots E[X_n] \not\Rightarrow X_1, X_2, \ldots X_n$: ανεξάρτητες

3. Υπενθύμιση

$A \in \mathcal{A}$, A^c:, 1_A: Δείκτρια του A

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

$E[1_A] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) =$
$= P(A)$

4. Παράδειγμα - Matching Problem

n άτομα με τα καπέλα τους.
Τα βάζουν στο κέντρο - διαλέγουν στην τύχη

X = # ατόμων που βρίσκουν το καπέλο τους
E[X] = ;

A_i = {το άτομο i βρίσκει το καπέλο του, i = 1, 2, ..., n}

$$X = \sum_{i=1}^{n} 1A_i \Rightarrow E[X] = E[\sum_{i=1}^{n} 1A_i] = \sum_{i=1}^{n} E[1A_i] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = 1$$

$P(A_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

5. Παράδειγμα - Coupon Collector problem

Υπάρχουν n τύποι κουπονιών
Ένας πελάτης αγοράζει προϊόντα.
Κάθε προϊόν έχει 1 κουπόνι που είναι το i με πιθανότητα 1/n

X = # προϊόντων που αγοράζει μέχρι να μαζέψει τουλάχιστον 1 από κάθε είδος κουπονιού.

E[X] = ;

Έστω X_i = # προϊόντων που θα αγοράσει από τη στιγμή που βρήκε το i-1 διαφορετικό τύπο κουπονιού ως τη στιγμή που βρήκε τον i τύπο κουπονιού.

$X_1 = 1$

$X_2 = $ # δοκιμών Bernoulli μέχρι την πρώτη επιτυχία $\sim Geom\left(\frac{n-1}{n}\right)$

επιτυχία = νέος τύπος κουπονιού

$$P(X_2 = i) = \left(\frac{1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n-1}{n}\right), \quad i \geq 1$$

$X_3 \sim Geom\left(\frac{n-2}{n}\right)$

Γενικά: $X_1 = 1 \Rightarrow E[X_1] = 1$

$X_i \sim Geom\left(\frac{n-i+1}{n}\right), \quad i \geq 2 \Rightarrow E[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$

Όμως $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \Longrightarrow E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

$$= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \dots + \frac{n}{1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \simeq n \ln n$$

6. Παράδειγμα (Ροές)

$\underbrace{00}\underbrace{11}\underbrace{0}\underbrace{1}\underbrace{000}\underbrace{1}\underbrace{00}\underbrace{1}\underbrace{000}\underbrace{11}\underbrace{0}\underbrace{1}$

m	n
00	11
00	1

m "0"

n "1"

Πείραμα Τύχης: Εξαγωγή χωρίς επανάθεση

Αποτέλεσμα: Ακολουθία από m "0" και n "1"

π.χ. $m=3$, $n=8$ $\quad \underbrace{0}\underbrace{111}\underbrace{00}\underbrace{1111} \rightarrow 4$ ροές

Ροή = Block από συνεχόμενα 0 ή συνεχόμενα 1

$R = \#$ ροών , $E[R] = ;$

$R(0) = \#$ ροών με συνεχόμενα "0"
$R(1) = \#$ ροών με συνεχόμενα "1"

$E[R] = E[R(0) + R(1)] = E[R(0)] + E[R(1)]$

$\overbrace{000110011110}^{m+n \text{ στοιχεία}}$

$A_i = \{$στο σημείο i αρχίζει μια ροή από "0"$\}$

$$R(0) = \sum_{i=1}^{m+n} 1_{A_i} \Rightarrow E[R(0)] = \sum_{i=1}^{m+n} E[1_{A_i}] = \sum_{i=1}^{m+n} P(A_i)$$

$P(A_1) = \frac{m}{m+n}$ Πιθανότητα στην 1η θέση να βγει "0"

$P(A_i) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}$ Πιθανότητα να έχω "0" στην i-θέση και "1" στην i-1 θέση.

$$E[R(0)] = \sum_{i=1}^{m+n} P(A_i) = \frac{m}{m+n} + \sum_{i=2}^{m+n} \frac{n \cdot m}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{m}{m+n} + \frac{n \cdot m}{n+m} = \frac{m(n+1)}{m+n}$$

Ομοίως $E[R(1)] = \frac{n(m+1)}{n+m}$

Τελικά $E[R] = \frac{n(m+1) + m(n+1)}{n+m}$