26/4/13 27ο Μάθημα

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής και Εφαρμογές

① Θεώρημα

$$E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum_y P[Y=y]\,E[X|Y=y], & Y \text{ διακρ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,E[X|Y=y], & Y \text{ συνεχή} \end{cases}$$

Απόδειξη (X,Y διακριτές)

$$\sum_y P[Y=y]\,E[X|Y=y] = \sum_y P[Y=y] \overbrace{\sum_x x P[X=x|Y=y]}^{E[X|Y=y]}$$

$$= \sum_y \sum_x x \underbrace{P[Y=y]P[X=x|Y=y]}_{P[Y=y,\,X=x] = P_{X,Y}(x,y)}$$

$$= \sum_x x \underbrace{\sum_y p_{X,Y}(x,y)}_{P_X(x)} = E[X]$$

② Υπολογισμός μέσου πλήθους ρίψεων νομίσματος για παρατήρηση ακολουθίας συμβόλων.

Δίκαιο νόμισμα $\begin{pmatrix} K \to 1/2 \\ \Gamma \to 1/2 \end{pmatrix}$

$X_1 = \#$ ρίψεων μέχρι ΚΚ

$X_2 = \#$ ρίψεων μέχρι ΚΓ

$E[X_1] = ;$

$E[X_2] = ;$

$X = \#$ ρίψεων μέχρι Κ

$\sim Geom(1/2)$

$P[X=x] = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , x = 1, 2, \dots$

$E[X] = 2$

$Y_1 = \begin{cases} 1 & , \text{η } 1^{\eta} \text{ ρίψη Κ} \\ 0 & , \text{η } 1^{\eta} \text{ ρίψη Γ} \end{cases} \qquad Y_2 = \begin{cases} 1 & , \text{η } 2^{\eta} \text{ ρίψη Κ} \\ 0 & , \text{η } 2^{\eta} \text{ ρίψη Γ} \end{cases}$

$E[X_1] = P(K)\, E[X_1|K] + P(\Gamma) \cdot E[X_1|\Gamma]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|KK]}_{2} + \frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|K\Gamma]}_{2+E[X_1]}\right) + \frac{1}{2} \underbrace{E[X_1|\Gamma]}_{1+E[X_1]} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E[X_1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} E[X_1] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} E[X_1] = \frac{3}{2} \Rightarrow E[X_1] = 6$

$X_2 = \#$ ρίψεων ως ΚΓ

$E[X_2] = P(K) \cdot E[X_1|K] + P(\Gamma)\, E[X_2|\Gamma] =$

$= \frac{1}{2} \cdot (1 + E[\text{Να έρθουν } \Gamma]) + \frac{1}{2} (1 + E[X_2]) = \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{2}(1 + E[X_2])$

$\Leftrightarrow E[X_2] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[X_2] \Rightarrow E[X_2] = 4$

③ Παράδειγμα

κότα γεννάει N αυγά
$N \sim Poisson(\lambda)$.
κάθε αυγό εκκολάπτεται ανεξάρτητα από τα άλλα
με πιθανότητα P

$(K|N=n) \sim Bin(n,p)$

$$P(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n=0,1,\ldots$$

$$P(K=k|N=n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n.$$

$$E[K|N=n] = \sum_k k P[K=k|N=n] = np$$

$$E[N|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} n P[N=n|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} n \frac{P[N=n, K=k]}{P(K=k)} \quad ①$$

$$P[N=n, K=k] = P[N=n]\,P[K=k|N=n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad ②$$

$$P[K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} P[K=k, N=n] = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^n$$

$$\overset{j=n-k}{=\!=} e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!\cancel{(1-p)^k}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+j}}{j!}(1-p)^{\cancel{k+}j}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k p^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}$$

$$= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \quad ③, \quad k=0,1,\ldots$$

$(K \sim Poisson(\lambda p))$

Άρα ① $\overset{②}{\underset{③}{\Longrightarrow}}$ $E[N|K=k] = \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}} =$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}(n-k)!} \cancel{p^k} (1-p)^{n-k}}{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda \cancel{p})^k}{\cancel{k!}}}$$

$$= e^{-\lambda(1-p)} \sum_{n=k}^{\infty} n \frac{\lambda^{n-k} (1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$\overset{j=n-k}{=} e^{-\lambda(1-p)} \sum_{j=0}^{\infty} (k+j) \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$= k \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}$$

$$+ \lambda(1-p) = k + \lambda(1-p)$$

$E[K] = \lambda p$

④ Παράδειγμα

Πείραμα Τύχης

Διαδοχικές Ρίψεις (ανεξάρτητες) νομίσματος

$$\begin{pmatrix} P(K) = p \\ P(\Gamma) = 1-p \end{pmatrix}$$

$E[T_r] = ;$

T_r = # ρίψεων ώσπου να δούμε r συνεχόμενες "K"

Π.χ. $r = 4$

К Г Г К К Г К К Г Г Г Г Г К К Г $\boxed{\text{К К К К}}$ Г К Г Г К Г К

$1^{ος}$ τρόπος Δέσμευση στον αριθμό ρίψεων που έρχονται "Γ" για πρώτη φορά

$$E[T_r] = \sum_{x=1}^{\infty} P[X=x]\, E[T_r \mid X=x]$$

Όμως $P[X=x] = p^{x-1}(1-p) \quad , x \geq 1$

$$E[T_r \mid X=x] = \begin{cases} r & , x \geq r+1 \\ x + E[T_r] & , 1 \leq x \leq r \end{cases}$$

Άρα $E[T_r] = \sum_{x=1}^{r} p^{x}(1-p)\,(x + E[T_r]) + \sum_{x=r+1}^{\infty} p^{x-1}(1-p)\, r.$

$\Leftrightarrow E[T_r] = \ldots$

$2^{ος}$ τρόπος

$$E[T_r] = E[\,E[T_r \mid T_{r-1}]\,] = \sum_{x} P[T_{r-1}=x]\, E[T_r \mid T_{r-1}=x]$$

$$E[T_r \mid T_{r-1}=x] = p(x+1) + (1-p)(x+1+E[T_r])$$
$$= x+1+(1-p)E[T_r]$$

Άρα $E[T_r] = \sum_{x} P[T_{r-1}=x]\,(x+1+(1-p)\cdot E[T_r])$

$$= E[T_{r-1}] + 1 + (1-p)\,E[T_r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[T_r] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} E[T_{r-1}] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} E[T_{r-2}]\right)$$

$$= \ldots = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^r}$$

⑤ Μέση τιμή Τυχαίου Αθροίσματος Τυχαίων Μεταβλητών

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητα και ίσον τ.μ.
με $E[X_i] = \mu_X$
N τ.μ. ακέραια ≥ 0, ανεξ. των X_i με $E[N] = \mu_N$

Προσοχή!

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \neq \sum_{i=1}^{N} E[X_i] = N \cdot \mu_X \quad \text{για } N \text{ τ.μ.}$$

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N\right]\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N=n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[N=n] \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= E[N]\,\mu_X \\ &= \mu_N \cdot \mu_X \end{aligned}$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E[N]\,\mu_X$$