28ο Μάθημα

Ασκήσεις (από το φυλλάδιο, με τον κ. Χελιώτη)

(1) Σε πόλη $(n+1)$ ατόμων ένα άτομο επιλέγει τυχαία ένα από τα υπόλοιπα και λέει μία φημολογία. Το δεύτερο άτομο κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια.
Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(α) η φημολογία να ειπωθεί r φορές χωρίς να γυρίσει σε αυτόν που την άρχισε.
(β) η φημολογία να ειπωθεί r $(\leq n)$ φορές χωρίς να ακουστεί από άτομο που την ξέρει ήδη.

ΛΥΣΗ

(α) $\dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \dfrac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}$ (από πολλ. αρχή)

(β) $\dfrac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n^r} = \dfrac{(n)_r}{n^r}$

② Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά

6 βιβλία Μαθηματικών
4 βιβλία Φυσικής
3 βιβλία Ιστορία
7 βιβλία ξένων γλωσσών
10 Λεξικά (δηλ. 30 βιβλία)

Ποια η πιθανότητα όλα τα βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί;

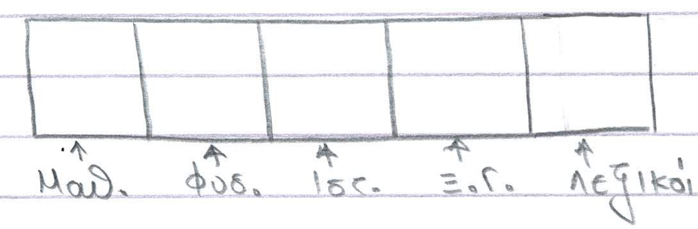
ΛΥΣΗ

Δυνατοί τρόποι $= 30!$

Ευνοϊκοί τρόποι $= 5!\ 6!\ 4!\ 3!\ 7!\ 10!$

καθορισμός σειράς θεμάτων — Μαθ. — Φυσ. — Ιστ. — Ξ.Γ. — Λεξικά

Πιθανότητα $= \dfrac{5!\,6!\,4!\,3!\,7!\,10!}{30!}$



← Μία δυνατή τοποθέτηση των βιβλίων

③ Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n ζευγάρια. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ζευγάρι.

ΛΥΣΗ

2 επιλογές για κάθε ζευγάρι.

$$\frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$$

④ Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές. $(n \geq 2)$

(Έχει μπει σε εξετάσεις)

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να εμφανισθεί το 6 τουλάχιστον 2 φορές.

β) να εμφανισθεί το 6 τουλάχιστον 2 φορές και να μην εμφανισθεί καθόλου το 1.

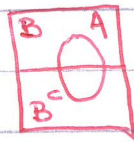
ΛΥΣΗ

α) Έστω X = ο αριθμός εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις.

$(P(B) = P(\Omega) - P(B^c))$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{5^n}{6^n} + \frac{5^{n-1} \cdot n}{6^n}\right)$$

β) $A = \{\text{δεν εμφανίζεται το } 1\}$, $B = \{X \geq 2\}$



$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$ ($A \cap B$, $A \cap B^c$ είναι ξένα με ένωση το A)

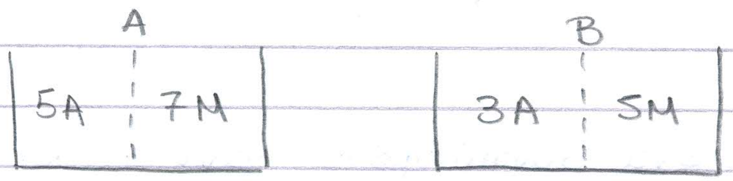
$P(A) = \frac{5^n}{6^n}$

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap (\{X=0\} \cup \{X=1\})) = P((A \cap \{X=0\}) \cup (A \cap \{X=1\})) =$$
$$= P(A \cap \{X=0\}) + P(A \cap \{X=1\}) = \frac{4^n}{6^n} + \frac{n\, 4^{n-1}}{6^n}$$

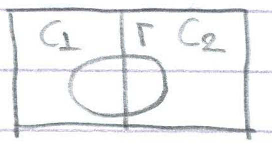
Θεώρημα ολικής πιθανότητας → Για πειράματα που γίνονται σε δύο ή περισσότερα βήματα

(5) Μια κάλπη A περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια.
Μια κάλπη B περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια.
Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την A και το τοποθετούμε στην B.
Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την B.
Ποια η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο;

ΛΥΣΗ



Έστω C_1 = {το σφαιρίδιο που επιλέγω από την A είναι άσπρο}.



C_2 = {το σφαιρίδιο που επιλέγω από την A είναι μαύρο}.

Γ = {το δεύτερο σφαιρίδιο είναι άσπρο}.

$$P(\Gamma) = P(\Gamma \cap C_1) + P(\Gamma \cap C_2)$$
$$= P(C_1) \cdot P(\Gamma | C_1) + P(C_2) P(\Gamma | C_2)$$
$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{9} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$
$$= P(B) \cdot P(A|B)$$

(6) Μία κάλπη περιέχει 6 λάμπες τύπου A και 4 λάμπες τύπου B.

(Έχει μπει παρόμοιο σε εξετάσεις)

Ο χρόνος ζωής μιας λάμπας τύπου A ακολουθεί την κατανομή $\exp\left(\frac{1}{3}\right)$

Ο χρόνος ζωής μιας λάμπας τύπου B ακολουθεί την κατανομή $\exp\left(\frac{1}{20}\right)$

Επιλέγουμε από το τυχαία μία λάμπα στη τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει χρόνο ζωής ≥ 10.

ΛΥΣΗ

Αν $X \sim Exp(\lambda)$ τότε $P(X \geq x) = \int_x^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x}$ (*)

Έστω W ο χρόνος ζωής της λάμπας που επιλέγουμε

$C_1 = \{$επιλέγουμε λάμπα τύπου A$\}$
$C_2 = \{$επιλέγουμε λάμπα τύπου B$\}$

$$P(W \geq 10) = P(\{W \geq 10\} \cap C_1) + P(\{W \geq 10\} \cap C_2)$$
$$= P(C_1) \cdot P(W \geq 10 \mid C_1) + P(C_2) P(W \geq 10 \mid C_2)$$
$$= \frac{6}{10} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{3} \cdot 10}}_{\text{λόγω } (*)} + \frac{4}{10} \underbrace{e^{-1/20 \cdot 10}}_{\text{λόγω } (*)}$$

(7) Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά κ' 3 αργυρά νομίσματα
— " — Σ_2 — " — 3 — " — 6 — " — " —

κλέφτης ανοίγει στην τύχη (στα σκοτεινά) ένα συρτάρι και παίρνει 2 νομίσματα

(α) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα 2 χρυσά;

(β) Αν κατά τη σύλληψή του διαπιστωθεί ότι έχει κλέψει δύο χρυσά νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να έχει ανοίξει το συρτάρι Σ_1;

ΛΥΣΗ

(α) Έστω B το ενδεχόμενο να πήρε δύο χρυσά νομίσματα και A το ενδεχόμενο να ανοίξει το Σ.

και

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$
$$= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{17}{120}$$

(β)
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \overset{\text{Τύπος Bayes}}{=} \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{\underset{\text{ερώτημα (α)}}{\frac{17}{120}}}$$

$$= \frac{12}{17} \quad \left(> \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{\text{Τύπος Bayes} \rightarrow \text{Ανάποδη χρονική εξάρτηση}}$