(με τον κ. Χελιώτη) 29ο Μάθημα 15/5/13

3 Από κάλπη που περιέχει κλήρους $\{1, 2, \ldots, n\}$ εξάγονται χωρίς επανάθεση k κλήροι $(k \le n)$

(Από το φυλλάδιο της e-class)

Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται.

Να υπολογιστούν:

(α) η συνάρτηση πιθανότητας της X

(β) η $E[X]$

ΛΥΣΗ

Η X παίρνει τιμές $k, k+1, \ldots n$

Για $r \in \{k, k+1, \ldots, n\}$

$$f_X(r) = P(X=r) = P(X \le r) - P(X \le r-1)$$

$$= \frac{(r)_n}{(n)_k} - \frac{(r-1)_k}{(n)_k}$$

$$= \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1) - (r-1)\cdots(r-1-k+1)}{(n)_k}$$

$$= \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1) - (r-1)\cdots(r-1+1)(r-k)}{(n)_k}$$

$$= \frac{(r-1)\cdots(r-k+1)\cdot(r-r+k)}{(n)_k} = \frac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k}$$

Άρα
$$f_X(r) = \begin{cases} \dfrac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k} & \text{αν } r \in \{k, k+1, \ldots n\} \\ 0 & \text{αν } r \in \mathbb{R} \setminus \{k \ldots n\}. \end{cases}$$

(β) $$E[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = \sum_{r=k}^{n} r \frac{k(r-1)_{k-1}}{(n)_k} = \cdots = \frac{k}{k+1}(n+1)$$

3 ζ) Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας

(Από το φυλλάδιο της e-class)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} &, \text{αν } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\} \\ 0 &, \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} - \{0\}) \end{cases}$$

Για ποια $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E[X^a] < \infty$;

ΛΥΣΗ

$$E[X^a] = \sum_{x=1}^{\infty} x^a f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^a}{x(x+1)}$$

Η τελευταία σειρά έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^a}{x^2}$

(κριτήριο σύγκρισης $\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^a}{x(x+1)}}{\frac{x^a}{x^2}} = 1$)

Δηλαδή την $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2-a}}$

Αυτή έχει άθροισμα $< \infty$ αν και μόνο αν $2-a > 1$.
Δηλ. $a < 1$

4.3 Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στόχο. Η πιθανότητα να πετύχει η φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να πετύχει 3.
Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει στόχο σε μία δεδομένη βολή.

ΛΥΣΗ

Έστω p η ευστοχία του σκοπευτή και
X ο αριθμός επιτυχιών στις 10 βολές.
Δίνεται ότι $P(X=4)=3P(X=3)$ (*)

$X \sim Bin(10,p)$

Άρα η (*) $\Leftrightarrow$ $\binom{10}{4}p^4(1-p)^6=3\binom{10}{3}p^3(1-p)^7=0 \Rightarrow$

$$\frac{1-p}{p}=\frac{\binom{10}{4}}{3\binom{10}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{p}-1=\dots \Leftrightarrow p=\frac{12}{19}$$

$$Bin(n,p)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Συνέχεια της άσκησης:
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει στόχο.
(α) Δύο τουλάχιστον φορές.
(β) ή όλες ή καμία φορές
(γ) το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον 2

ΛΥΣΗ

(α) $P(r\geq 2)=1-P(r<2)=1-P(r=0)-P(r=1)$
$=1-(1-p)^5-\binom{5}{1}p(1-p)^4$

(β) $P(r=5 \text{ ή } r=0)=P(r=5)+P(r=0)=p^5+(1-p)^5$

(γ) $P(r\leq 4 \mid r\geq 2)=\dfrac{P(r\leq 4 \text{ και } r\geq 2)}{P(r\geq 2)}$

$=\dfrac{P(r=2)+P(r=3)+P(r=4)}{P(r\geq 2)}$ ← ερώτημα (α)

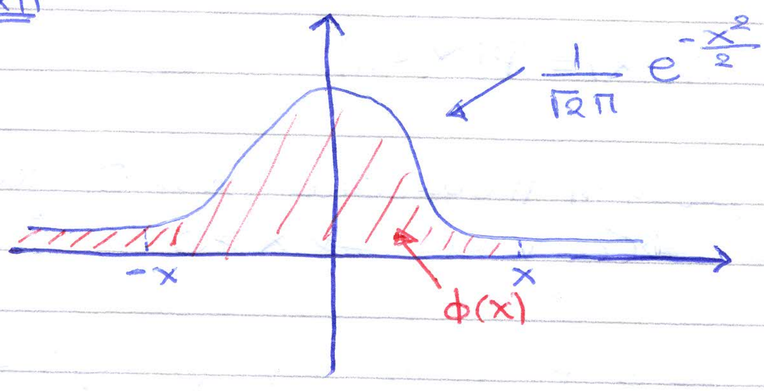
5.5 Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Αν $P(X>1{,}85)=0{,}2$ και $P(X>1{,}7)=0{,}9$

να βρεθούν τα μ, σ^2.

Δίνεται ότι $\phi^{-1}(0{,}8)=0{,}85$ $\quad \phi^{-1}(0{,}9)=1{,}29$

ΛΥΣΗ



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ← πυκνότητα της $N(0,1)$

$\phi(x)+\phi(-x)=1$

Η $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$0{,}9 = P(X>1{,}7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\phi\left(\frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(-\frac{1{,}7-\mu}{\sigma}\right) \xRightarrow{\phi^{-1}(0{,}9)=1{,}29}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu-1{,}7}{\sigma} = 1{,}29$$

$$0{,}2 = P(X>1{,}85) = P\left(\underset{\overset{\parallel}{Z}}{\frac{X-\mu}{\sigma}} > \frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right) = 1-\phi\left(\frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{1{,}85-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \xRightarrow[\phi^{-1}(0{,}8)=0{,}85]{} \frac{1{,}85-\mu}{\sigma} = 0{,}85$$

Βρίσκουμε $\mu \simeq 1{,}79$, $\sigma \simeq 0{,}07$

5.17 Έστω $\theta>0$.
SOS Υποθέτουμε ότι $U \sim U(0,1)$
(α) Δείξτε ότι τ.μ. $X = -\frac{1}{\theta}\log U \sim exp(\theta)$
(β) Βρείτε την πυκνότητα της $Y = \log \frac{U}{1-U}$

ΛΥΣΗ

(α) Για $x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = P(X \le x)$

- Αν $x \le 0$ αυτή η πιθανότητα είναι 0 γιατί $U \in (0,1) \Rightarrow \log U < 0 \Rightarrow X > 0$

- Αν $x>0$, τότε $P(X\le x) = P\left(-\frac{1}{\theta}\log U \le x\right) =$

$= P(\log U \ge -\theta x) = P(U \ge e^{-\theta x}) = \int_{e^{-\theta x}}^{1} 1\,dt = 1 - e^{-\theta x}$

Άρα $F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 1-e^{-\theta x} & , x>0 \end{cases}$

και $f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & , x\le 0 \\ \theta e^{-\theta x} & , x>0 \end{cases}$

Άρα $X \sim exp\theta$

(β) Για $x \in \mathbb{R}$,

$f_Y(x) = P\left(\log \frac{U}{1-U} \le x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \le e^x\right) = P\left(U \le \frac{e^x}{e^x+1}\right) =$

$(1+e^x)>0$

$= F_U\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_Y'(x) = F_U'\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \cdot \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = f_U\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) \cdot \frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Άρα Y έχει πυκνότητα $f_Y(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5.15 $X \sim exp(\lambda)$. Ποια η κατανομή της $Y = [X]$;

ΛΥΣΗ

Η Y είναι διακριτή τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Για $k \in \mathbb{N}$,

$$f_Y(x) = P(Y = k) = P([X] = k) = P(k \leq X \leq k+1)$$

$$= \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda s} \Big|_k^{k+1} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$$

$$= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda})$$

Άρα $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda}) & \text{αν } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Καθορίζουμε την κατανομή μιας τ.μ. X δίνοντας την συνάρτηση κατανομής F_X ή την f_X.
(η οποία είναι σ. πιθανότητας αν X διακριτή και συν. πυκνότητας αν X συνεχής)