17/5/13

Ασκήσεις

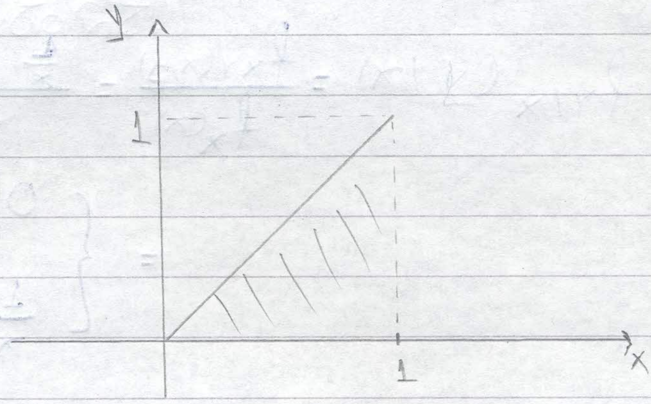
1. Άσκηση 6.6

X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{αν } 0<y<x<1 \\ 0 & \text{, διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) Να δείξετε ότι πράγματι η f είναι πυκνότητα.
(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X/Y}(\cdot/y)$, $f_{Y/X}(\cdot/x)$ για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

Λύση



(α) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_0^1\int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= \int_0^1 1\,dx = 1$

Επίσης ≥ 0. Άρα η f είναι πυκνότητα.

(β) Για $y\in\mathbb{R}$ $\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{για } y\in\mathbb{R}\setminus(0,1) \\ \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = -\log y & \text{για } y\in(0,1) \end{cases}$

Άρα $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y\in\mathbb{R}\setminus(0,1) \\ -\log y & , y\in(0,1) \end{cases}$

Άρα $f_{X/Y}(\ /y)$ ορίζεται ακριβώς για τα $y \in (0,1)$
(δηλαδή εκείνα που $f_Y(y) \neq 0$).

και $f_{X/Y}(x/y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{\frac{1}{x} 1_{0<y<x<1}}{-\log y}$

$$= \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (y,1) \\ -\dfrac{1}{x\log y}, & x \in \mathbb{R}(y,1) \end{cases}$$

Όμοια $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \\ \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = 1, & x \in (0,1) \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

Άρα $f_{Y/X}(\ /x)$ ορίζεται ακριβώς για τα $x \in (0,1)$
(δηλαδή εκείνα που $f_X(x) \neq 0$)

και $f_{Y/X}(y/x) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\frac{1}{x} 1_{0<y<x<1}}{1}$

$$= \begin{cases} 0, & y \in \mathbb{R} \setminus (0,x) \\ \dfrac{1}{x}, & y \in (0,x) \end{cases}$$

2. Άσκηση 7.2

Έστω X, Y τ.μ. με από κοινού πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} -xy, & \text{αν } (x,y) \in \underbrace{(-1,0)\times(0,1)} \cup \underbrace{(1,2)\times(-1,0)}_{\text{τετράγωνα}} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

(α) να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X+Y<0)$

(β) να υπολογιστεί η $E[XY]$

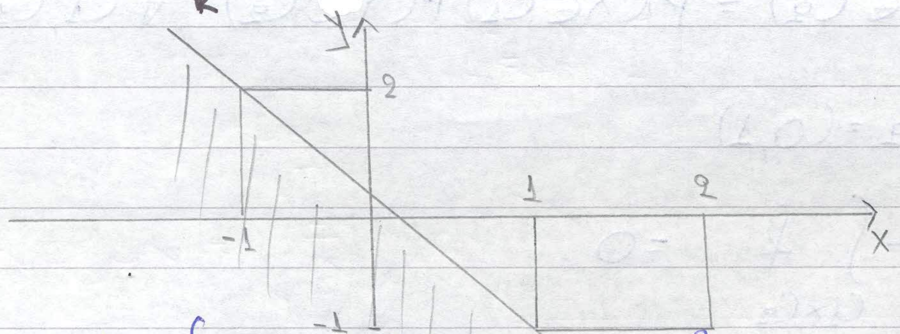
(γ) είναι οι X, Y ανεξάρτητες

Λύση

- Η f είναι χρήσιμη για δύο υποθέσεις:

(i) $P((X,Y)\in A) = \int_A \int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \quad \forall A \subset \mathbb{R}^2$

(ii) $E(g(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2}\int g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \quad \forall \; : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



α) Έστω $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x+y<0\}$

$$P(X+Y<0) = P((X,Y)\in A) \overset{(i)}{=} \int_A \int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{A_1}\int (-xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} (-xy)\,dy\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} x \int_{0}^{-x} y\,dy\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,\frac{x^2}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

(β) $$E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2}\int xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{(-1,0)\times(0,1)} xy(-xy)\,dx\,dy$$

$$+\int\int_{(1,2)\times(-1,0)} xy(-xy)\,dx\,dy = -\frac{8}{9}$$

(γ)

$$P(X\in C_1, Y\in C_2) = P(X\in C_1)\,P(X\in C_2)$$

$$\Downarrow$$

Δεν είναι ανεξάρτητες γιατί αν ήταν θα είχαμε

(*) $P(X\in C_1, Y\in C_2) = P(X\in C_1)\,P(Y\in C_2)$, $\forall\, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Για $C_1 = (1,2)$, $C_2 = (0,1)$

$$P(X\in C_1, Y\in C_2) = \int_{C_1\times C_2} f = 0$$

ενώ $$P(X\in C_1) = \int\int_{(1,2)\times(1,0)} (-xy)\,dx\,dy > 0$$

και

$$P(Y\in C_2) = \int\int_{(-1,0)\times(1,2)} (-xy)\,dx\,dy > 0$$

Άρα η (*) δεν ισχύει.

Άσκηση 7.3.

X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές με $E[X^2], E[Y^2] < \infty$, $Z \sim N(0,1)$
$Cov(X,Y) = 1$ και η Z ανεξάρτητη από τις X, Y.

Να υπολογιστεί η $Cov(XZ^2, Y+Z)$

Λύση

σαν διγραμμική

$$Cov(XZ^2, Y+Z) \overset{\downarrow}{=} Cov(XZ^2, Y) + Cov(XZ^2, Z)$$

$$= E[XZ^2Y] - E[XZ^2]E[Y] + E[XZ^2Z] - E[XZ]^2 E[Z]$$

$$= E[XY]E[Z^2] - E[X]E[Z^2]E[Y] + E[X]E[Z^3] - E[X]E[Z^2]E[Z]$$

↑ Z: ανεξάρτητη από X, Y

$$= E[Z^2]\left(E[XY] - E[X]E[Y] + E[X]E[Z^3]\right)$$

$$= Cov(X,Y) + E[X]E[Z^3]$$

$$= 1 + E[X]E[Z^3]$$

$$E[Z^3] = \int_{\mathbb{R}} x^3 f_Z(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx}_{\text{Περιττή}} = 0$$

$Z \sim N(0,1)$
$E[Z] = 0$
$Var[Z] = 1$
$\Rightarrow E[Z^2] - E[Z]^2 = 1$
$\Rightarrow E[Z^2] = 1$

3) Άσκηση 7.6

Επιλέγουμε έναν αριθμό X ομοιόμορφα τυχαία στο σύνολο $\{1,2,\dots,20\}$ και θέτουμε $Y=21-X$.

(α) Ποια είναι η κατανομή της Y;
(β) Τι πρόσημο περιμένουμε να έχει η $Cov(X,Y)$;
Να αποδείξετε τυπικά ποιο είναι αυτό.

Λύση

(α) Η Y είναι διακριτή τ.μ., άρα αρκεί να βρούμε την συνάρτηση πιθανότητας f_Y

Η Y παίρνει τιμές στο $A=\{1,2,\dots,20\}$

Άρα $f_Y(y)=P(Y=y)=0$ αν $y\notin A$

Ενώ αν $y\in A$ τότε $f_Y(y)=P(Y=y)=P(21-X=Y)$
$=P(\underbrace{X=21-Y}_{\in\{1,2,\dots,20\}})=1/20$

Άρα $f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{αν } y\in\mathbb{R}\setminus A\\ \frac{1}{20} & \text{αν } y\in A\end{cases}$

(β) Περιμένουμε $Cov(X,Y)<0$ γιατί όταν η X παίρνει "μεγάλη" τιμή τότε η Y παίρνει "μικρή" τιμή
"μικρή" "μεγάλη"

$Cov(X,Y)=Cov(X,21-X)=Cov(X,21)-Cov(X,X)$

$= 0 - \underbrace{Var[X]}_{>0} <0$

- Χρησιμοποιήσαμε ότι για σταθερά $a \in \mathbb{R}$
$Cov(X, a) = 0$ αφού
$$\begin{aligned} Cov(X,a) &= E[Xa] - E[X]E[a] \\ &= aE[X] - aE[X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Επίσης $Var[X] > 0$ γιατί η X δεν είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή (γενικά $Var[W] \geq 0$, $\forall W$)

4. Άσκηση 7.10

X_1, X_2 : ανεξάρτητες, $X_1, X_2 \sim exp(\mu)$.
Να βρεθούν οι $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)$, $(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)$.
Είναι οι X_1+X_2, $2X_1+3X_2$ ανεξάρτητες;
Δίνεται ότι $E[X_1] = \frac{1}{\mu}$, $Var[X_1] = \frac{1}{\mu^2}$

Λύση

$$\begin{aligned} Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) &= Cov(X_1, 2X_1) + Cov(X_1, 3X_2) + Cov(X_2, 2X_1) \\ &\quad + Cov(X_2, 3X_2) \\ &= 2\,Cov(X_1, X_1) + 3\,Cov(X_1, X_2) + 2\,Cov(X_2, X_1) + 3\,Cov(X_2, X_2) \\ &= 2\,Var[X_1] + 0 + 0 + 3\,Var[X_2] \\ &= 5\,\frac{\mu}{2} \quad 5\,\frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

Επειδή $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) \neq 0$ τότε

Τέλος, $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \dfrac{Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)}{\sqrt{Var(X_1+X_2)}\sqrt{Var(2X_1+3X_2)}}$

Ο αριθμητής $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = 5/\mu^2$

$$Var[X_1+X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2\,\underbrace{Cov[X_1, X_2)}_{=0} = 2/\mu^2$$

$$Var[2X_1+3X_2] = Var[2X_1] + Var[3X_2] + 2\,\underbrace{Cov(2X_1, 3X_2)}_{=0} =$$

$$= 4\,Var[X_1] + 9\,Var[X_2] = 13/\mu^2$$

Άρα $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$