20/5/13 31º Μάθημα

Πιθανογεννήτριες - Ροπογεννήτριες

① Πιθανογεννήτριες

X διακριτή τ.μ. με τιμές στο $\{0,1,\dots\}$
με σ.π.π. $\underset{p_n}{P(X=n)}$: $n=0,1,\dots$

Πιθανογεννήτρια της X :

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=n)}_{p_n} z^n \quad , |z| \le 1$$

② Ιδιότητες

1| $P(X=n) = \dfrac{P_X^{(n)}(0)}{n!}$, $n=0,1,2,\dots$

Από Απειρ. ΙΙ: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

2| $P(X=n) = P(Y=n)$, $n=0,1,\dots \iff P_X(z) = P_Y(z)$

3| $P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)]$ = n-οστή παραγοντική ροπή

ειδικά: $E[X] = P_X'(1)$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 \\ &= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2 \end{aligned}$$

Απόδειξη

$$E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)P(X=k)$$

$$P_X^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)z^{k-n} \Rightarrow$$

$$P_X^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$$

4) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. ≥ 0, ακέραιες

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\Downarrow$$

$$P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z)$$

Απόδειξη

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+X_2+\cdots+X_n}]$$

$$= E[z^{X_1} z^{X_2} \cdots z^{X_n}]$$

ανεξάρτητες

$$= E[z^{X_1}]\, E[z^{X_2}] \cdots E[z^{X_n}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) P_{X_2}(z) \cdots P_{X_n}(z)$$

5) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες. τ.μ. ≥ 0 ακερ.
με πιθανογεννήτρια $P_X(z)$

$N \geq 0$ ακέραιη, ανεξάρτητη των X_i

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$$

Απόδειξη

θ. ολικής μέσης τιμής

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] = E[E[z^{S_N} | N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{S_N} | N=n]$$

N ανεξάρτητη των Xi

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \,|\, \cancel{N=n}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, \underbrace{E[z^{X_1}]}_{P_X(z)}\, \underbrace{E[z^{X_2}]}_{P_X(z)} \cdots \underbrace{E[z^{X_n}]}_{P_X(z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{S_N}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, (P_X(z))^n = P_N(P_X(z))$$

③ Βασικές πιθανογεννήτριες

1) $X \sim Bernoulli(p)$

$P(X=1)=p \quad , P(X=0)=1-p \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n = 1-p+pz$$

2) $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \; 0 \le k \le n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, z^k = \ldots$$

$X = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad , \; I_i \sim Bernoulli(p)$ ανεξ.

$$\overset{4)}{\Rightarrow} P_X(z) = P_{I_1}(z) P_{I_2}(z) \cdots P_{I_n}(z) = (1-p+pz)^n$$

$$E[X] = P_X'(1) = np$$

3) $X \sim Geom(p)$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

$\Downarrow$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X=n)\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p \cdot z^n$$

$$= p \cdot z \sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1}$$

$$= \frac{p \cdot z}{1-(1-p)z}$$

4| $X \sim NegBim(n,p)$

$X = \#$ δοκιμών ως τη n-οστή επιτυχία σε ακολουθία δοκιμών Bernoulli (p)

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \left.\begin{array}{l} X_i \text{ ανεξάρτητες} \\ X_i \sim Geom(p) \end{array}\right\} \Rightarrow P_X(z) = \left(\frac{p\cdot z}{1-(1-p)z}\right)^n$$

5| $X \sim Poisson$

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad , n = 0, 1, \dots$$

$\Downarrow$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} z^n$$

$$= e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}}_{e^{\lambda z}} = e^{-\lambda(1-z)}$$

Άρα:

$X \sim Bernoulli(p) \longrightarrow P_X(z) = 1-p+pz$

$X \sim Bim(n,p) \longrightarrow P_X(z) = (1-p+pz)^n$

$X \sim Geom(p) \longrightarrow P_X(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$

$P(X=n) = (1-p)^{n-1}p \quad , n \geq 1$

$X \sim NegBim(p) \longrightarrow P_X(z) = \left(\dfrac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$

$X \sim Poisson(\lambda) \longrightarrow P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

④ Αναγεννητικές ιδιότητες

1) $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$ $\Longrightarrow$ $X+Y \sim Bin(n+m,p)$

Απόδειξη

$$P_{X+Y}(z) = P_X(z)\,P_Y(z)$$
$$= (1-p+pz)^n (1-p+pz)^m$$
$$= (1-p+pz)^{n+m}$$

πιθανογεννήτρια της $Bin(n+m,p)$

2) $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, X, Y ανεξάρτητες $\Longrightarrow$ $X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

Απόδειξη

$$P_{X+Y}(z) = P_X(z)\,P_Y(z)$$
$$= e^{-\lambda(1-z)} \cdot e^{-\mu(1-z)}$$
$$= e^{-(\lambda+\mu)(1-z)}$$

πιθανογεννήτρια της $Poisson(\lambda+\mu)$

⑤ Παράδειγμα

$N =$ # πελατών σε τράπεζα σε μία μέρα $\sim$ Poisson (λ)

$$I_i = \begin{cases} 1 & , \text{ο } i \text{ πελάτης καταθέτει χρήματα} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$M =$ # πελατών που καταθέτουν χρήματα σε μία μέρα

$P(M=m) =$;

$$P(N=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad , n = 0, 1, \ldots$$

$P(I_i = 0) = 1-p$, $P(I_i = 1) = p$

ανεξάρτητες μεταξύ τους και με το N

$P(M=m) =$;

ΛΥΣΗ

$$M = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

$$P_M(z) = P_N(P_I(z))$$

Όμως $N \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow P_N(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$I_i \sim \text{Bernoulli}(p) \Rightarrow P_I(z) = 1-p+pz$

$\Downarrow$

$$P_M(z) = e^{-\lambda(1-P_I(z))} = e^{-\lambda p(1-z)}$$

$\Downarrow$

$M \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

Άρα $P(M=m) = e^{-\lambda p} \dfrac{(\lambda p)^m}{m!} \quad , m = 0, 1, \ldots$

⑥ Παράδειγμα (Αντιστροφή πιθανογεννήτριας)

Έστω X διακριτή ακέραια ≥ 0 τ.μ. με πιθανογεννήτρια $P_X(z) = \frac{c}{6-z-z^2}$

$P(X=n) = ;$, $n=0,1,\ldots$

ΛΥΣΗ

$$P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$$

$$* \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1$$

$$\boxed{P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1} \Rightarrow \frac{c}{6-1-1^2} = 1 \Rightarrow c = 4$$

$$P_X(z) = \frac{4}{6-z-z^2} = \frac{4}{-(z+3)(z-2)} = \frac{4}{(z+3)(2-z)} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{3+z} \quad (*)_1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{z+3} = A + \frac{B}{3+z}(2-z) \xRightarrow{z=2} A = \frac{4}{5}$$

$$(*)_1 \Rightarrow \frac{4}{2-z} = \frac{A}{2-z}(3+z) + B \xRightarrow{z=-3} B = \frac{4}{5}$$

Άρα

$$\underbrace{P_X(z)}_{\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2-z} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3+z} = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z}{3})}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{4}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{15} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \quad n=0,1,\ldots$$