24/5/13

Νόμος των μεγάλων αριθμών (ΝΜΑ)

1. Νόμος Μεγάλων Αριθμών (Ασθενής)

$X_1, X_2, \ldots$: ανεξάρτητες, ισόνομες με $E[X_i] = \mu < \infty$

$\hookrightarrow \sum_x x f_X(x)$ ή $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

$\Downarrow$

$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S_n}{n}$ → Δειγματικός Μέσος

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} (P(\bar{X}_n - \mu) > \varepsilon) = 0$

Απόδειξη (απλοποιημένη όταν $\exists$ $Var[X] = \sigma^2 < \infty$)
(Πλήρης απόδειξη → Khintchin)

$P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon)$
$= P(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]|) > \varepsilon \leq \frac{Var[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$E[\bar{X}_n] = E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu$

$Var[\bar{X}_n] = Var[\frac{1}{n}\sum X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{\sigma^2}{n}$

2. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

$X_1, X_2, \ldots$: ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $E[X_i] = \mu < \infty$
$Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \in A\right) = P(Z \in A) \quad , \quad Z \sim N(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}}\right) = P(Z\in A) \quad , \quad Z\sim N(0,1)$$

Άλλες Μορφές

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} \in A\right) = P(Z\in A) \quad , \quad Z\sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \in A\right) = P(Z\in A) , \quad Z\sim N(0,1)$$

Συνήθως $A = (-\infty, x]$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$\Phi(x)$ → συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq x\right) = \Phi(x)$$

3. Διαισθητική έννοια του Κ.Ο.Θ.

$X_1, X_2, \ldots$: ανεξάρτητες, ισόνομες (ότι κατανομή και να έχουν) με $E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$ τότε για μεγάλα n

$$S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2) \quad , \quad \bar{X}_n \approx (\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

↑ προσεγγίζεται

4. Ιδέα Απόδειξης

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Λήμμα (Θεώρημα συνέχειας)

$Z, Z_1, Z_2, \ldots$ τ.μ. με σ.κ. $F_Z(x), F_{Z_1}(x), F_{Z_2}(x), \ldots$

και ροπογεννήτριες $M_Z(t), M_{Z_1}(t), M_{Z_2}(t), \ldots$

Τότε $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = F_Z(x)$ για κάθε σημείο συνέχειας της F_Z

Εφαρμόζω το Λήμμα για $Z_n = \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, $Z \sim N(0,1)$

Αρχικά υποθέτω ότι $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$

Τότε αρκεί να δείξω ότι: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{P(\underbrace{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}_{Z_n} \leq x)}_{F_{Z_n}(x)} = \underbrace{P(Z \leq x)}_{F_Z(x)}$

Αρκεί $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t) = e^{t^2/2}$

$M_{Z_n}(t) = E[e^{tZ_n}] = E[e^{\frac{tS_n}{\sqrt{n}}}] = M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{t^2/2}$

$\iff \lim_{n\to\infty} n\cdot L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \frac{t^2}{2}$, $L = \log M_X$

Έχουμε $\lim_{n\to\infty} n \cdot L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{L\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{n^{-1}} \underset{D.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{L'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)n^{-3/2}\, t}{-1\, n^{-2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{L'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{2\, n^{-1/2}} \underset{D.H.}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{L''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) t^2 \left(-\frac{1}{2}\right) n^{-3/2}}{2\left(-\frac{1}{2}\right) n^{-3/2}}$

$= \frac{t^2}{2} L''(0) = 1$

- $L(t) = \log M_x(t)$
- $L'(t) = \frac{M_x'(t)}{M_x(t)}$
- $L''(t) = \frac{M_x''(t) \cdot M_x(t) - M_x'^2(t)}{M_x^2(t)}$

$\Rightarrow L''(0) = \frac{1 \cdot 1 - 0^2}{1} = 1$

Στη γενική περίπτωση αν $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = 6^2$ τότε $X_i' = \frac{X_i - \mu}{6}$ τότε το Κ.Ο.Θ. ισχύει

Οπότε $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n'}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$

Όμως $S_n' = \frac{S_n - n \cdot \mu}{6}$

5. Άσκηση

Δείγμα από $n = 49$ λαμπτήρες

$T_k \sim exp$, $E[T_k] = 200$ ώρες, $k = 1, 2, \dots, 49$

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά:

$P_1 = P($συνολικός χρόνος ζωής ≥ 10.000 ώρες$) = ;$

$P_2 = P($το πολύ 14 από αυτούς να ζήσουν λιγότερο από 140 ώρες$) = ;$

Λύση

$P_1 = P(S_{49} \geq 10.000)$, όπου $S_{49} = \sum_{k=1}^{49} T_k$

$P_1 = P(S_{49} \geq 10.000) = P\left(\frac{S_{49} - E[S_{49}]}{\sqrt{Var[S_{49}]}} \geq \frac{10.000 - E[S_{49}]}{\sqrt{Var[S_{49}]}}\right)$ $Var[T_k] = \frac{1}{\lambda^2} = 40.000$

$\overset{\text{Κ.Ο.Θ.}}{\simeq} P\left(Z \geq \frac{10.000 - 49 \cdot 200}{\sqrt{49 \cdot 40.000}}\right)$, $Z \sim N(0,1)$

$= P\left(Z \geq \frac{1}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{7}\right)$

$P_2 = P($το πολύ 14 απ' τους 49 να ζήσουν λιγότερο από 140 ώρες$)$

$I_k = \begin{cases} 1, & \text{ο λαμπτήρας κ ζει λιγότερο από 140 ώρες} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$P_2 = P\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{49} I_k}_{= S'_{49}} \leq 14\right) = P\left(\frac{S'_{49} - E[S'_{49}]}{\sqrt{Var[S'_{49}]}} \leq \frac{14 - E[S'_{49}]}{\sqrt{Var[S'_{49}]}}\right)$

$\overset{\text{Κ.Ο.Θ.}}{\simeq} P\left(Z \leq \frac{14 - 49 \cdot 0{,}5}{\sqrt{49 \cdot 0{,}25}}\right)$, $Z \sim N(0,1) = P\left(Z \leq -\frac{10{,}5}{3{,}5}\right) = P(Z \leq -3)$

$= \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 0{,}001$

- $E[I_k] = P(I_k = 1) = P(T_k \leq 140) = \int_0^{140} \underset{\uparrow\, 1/200}{\lambda} e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\frac{140}{200}} \simeq 0{,}5$

- $Var[I_k] = p(1-p) = 0{,}5 - 0{,}5^2 = 0{,}25$