# 34º Μάθημα (τελευταίο) 27/05/13

## Κεντρικό Οριακό Θεώρημα
## Ασκήσεις – Εφαρμογές

① Κ.Ο.Θ.

$X_1, X_2, \ldots$: ανεξάρτητες και ισόνομες $E[X_i] = \mu < \infty$
$Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le x\right) \simeq P(Z \le x) = \Phi(x), \quad Z \sim N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \le x\right) = P(Z \le x) = \Phi(x)$$
$$Z \sim N(0,1)$$

## ② Τρόπος Εργασίας

$$P(a \leq S_n \leq b) = ;$$

$$\| $$

$$P\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\simeq$$

$$\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Αν οι $X_i$ παίρνουν ακέραιες τιμές τότε

$$P(a \leq S_n \leq b) \quad , a,b \in \mathbb{Z}$$

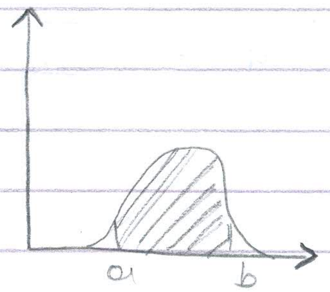
$$\|$$

$$P\left(a-\frac{1}{2} \leq S_n \leq b+\frac{1}{2}\right)$$

$$\|$$

$$P\left(a-\frac{3}{4} \leq S_n \leq b+\frac{4}{5}\right)$$

κ.λ.π.




(*) Ποιο να διαλέξω για να εφαρμόσω το ΚΟΘ;

Όταν $S_n$ ακέραια , $a,b \in \mathbb{Z}$

Τεχνική διόρθωσης συνέχειας

$$P(a \leq S_n \leq b)$$

$$\|$$

$$P\left(a-\frac{1}{2} \leq S_n \leq b+\frac{1}{2}\right)$$

και εφαρμόζω εδώ Κ.Ο.Θ. (διόρθωση συνέχειας)

## ③ Παράδειγμα

Παίκτης ρίχνει ζάρι.

| Ζάρια | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Κέρδος | -1 | -2 | -3 | 3 | 2 | 1 |

Προσεγγιστικός υπολογισμός πιθανότητας σε 42 ρίψεις να έχει συνολικό κέρδος τουλάχιστον 7.

---

$X_i$ = κέρδος στην $i$ ρίψη

$S_{42} = \sum_{i=1}^{42} X_i$ : κέρδος συνολικό

$$P(S_{42} \geq 7) \underset{\uparrow}{=} P(S_{42} \geq 6.5) = P\left(\frac{S_{42} - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}} \geq \frac{6.5 - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}}\right)$$

Διόρθωση συνέχειας

$$E[X_1] = \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(-2) + \frac{1}{6}(-3) + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 1 = 0$$

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - \cancel{E[X_i]}^{\,0\,2}$$

$$= \frac{1}{6}(-1)^2 + \frac{1}{6}(-2)^2 + \frac{1}{6}(-3)^2 + \dots = \frac{28}{6}$$

$$E[S_{42}] = 42\,E[X_i] = 42\cdot 0 = 0$$

$$Var[S_{42}] = 42\,Var[X_i] = 42\cdot\frac{28}{6} = 14^2$$

$$P(S_{42} \geq 7) = P\left(\underbrace{\frac{S_{42} - E[S_{42}]}{\sqrt{Var[S_{42}]}}}_{\simeq\, Z \sim \mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{6.5 - 0}{\sqrt{14^2}}\right) \overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(Z \geq \frac{6.5}{14}\right)_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{6.5}{14}\right)$$

## ④ Άσκηση

Πόλη 4000 κατοίκων

10 άτομα/ημέρα χρειάζονται νοσηλεία κατά μ.ο.

Προσεγγιστικός υπολογισμός ελάχιστου αριθμού κλινών ώστε η πόλη να εξυπηρετείται χωρίς διακομιδές ασθενών σε άλλες πόλεις με πιθανότητα 95%

—— ◦ ——

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{αν ο κάτοικος } k \text{ χρειάζεται νοσηλεία μια συγκεκριμένη μέρα} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$S_{4000} = \sum_{k=1}^{4000} I_k = \#\ \text{κατοίκων που χρειάζονται νοσηλεία τη συγκεκριμένη μέρα}$$

Θέλουμε το ελάχιστο $x$ ώστε $P(S_{4000} \le x) \ge 0{,}95$

$$P(S_{4000} \le x) \ge 0{,}95 \overset{\text{ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ}}{\Longleftrightarrow} P(S_{4000} \le x + 1/2) \ge 0{,}95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{S_{4000} - E[S_{4000}]}{\sqrt{Var[S_{4000}]}} \le \frac{x + \frac{1}{2} - E[S_{4000}]}{\sqrt{Var[S_{4000}]}}\right) \ge 0{,}95$$

$$\overset{\text{κ.ο.θ.}}{\Longleftrightarrow} P\left(Z \le \frac{x + 0{,}5 - 10}{\sqrt{9{,}9}}\right) \ge 0{,}95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x - 9{,}5}{\sqrt{9{,}9}}\right) \ge 0{,}95 = \Phi(1{,}96)$$

$Z \sim N(0,1)$

$$\left(\begin{aligned} &E[I_k] = 1/400 \\ &Var[I_k] = E[I_k^2] - E[I_k]^2 = 1/400 - 1/(400)^2 = 399/400^2 \\ &E[S_{4000}] = 4000\, E[I_k] = 10 \\ &Var[S_{4000}] = 4000 \cdot \frac{399}{(400)^2} = \frac{3990}{400} \simeq 9{,}9 \end{aligned}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 9{,}5}{\sqrt{9{,}9}} \ge 1{,}96 \Leftrightarrow x \ge 9{,}5 + 1{,}96\sqrt{9{,}9}$$

5 Άσκηση

Ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη ~ Uniform([-5, 5]) σε χιλιάδες €.

Προσεγγιστικός υπολογισμός

i) Πιθανότητα σε 48 μέρες να κερδίσει τουλάχιστον 30.

ii) Το ποσό s ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% το εισόδημα σε 48 ημέρες $\leq s$.

iii) Το πλήθος των ημερών που πρέπει να παίζει ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% το εισόδημα κατά απόλυτη τιμή < 5.0

$$P(\underset{\text{μέρες}}{S_n} \underset{>}{\leq} \underset{\text{ποσό}}{x}) \geq \underset{\text{επίπεδο βεβαιότητας}}{y}$$

$X_i$ = εισόδημα τη μέρα $i$

$$E[X_i] = \int_{-5}^{5} x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = 0 = \frac{\overset{-5}{a} + \overset{5}{b}}{2}$$

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - \cancel{E[X_i]^2}^{0} = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{B-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-5}^{5} = \frac{25}{3} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E[S_n] = 0 \cdot n = 0$$

$$Var[S_n] = n \cdot \frac{25}{3} = \frac{25n}{3}$$

(i) $P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \geq \frac{30-0}{\sqrt{\frac{25 \cdot 48}{3}}}\right)$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(Z \geq \frac{3\cancel{0}}{2\cancel{0}}\right) = 1 - \Phi(1,5)$$

(ii) $s = ;$

$$P(|S_{48}| \leq s) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(-s \leq S_{48} \leq s) \geq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-s - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \leq \frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \leq \frac{s - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}}\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow$$

$E[S_{48}] = 0$, $Var[S_{48}] = 48 \cdot \frac{25}{3} = 400$

$$\overset{KOO}{\Leftrightarrow} P\left(\frac{-s}{20} \leq Z \leq \frac{s}{20}\right) \geq 0,95 \quad , Z \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) - \Phi\left(\frac{-s}{20}\right) \geq 0,95 \xleftrightarrow{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{s}{20}\right) - 1 \geq 0,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96)$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{20} \geq 1,96 \Leftrightarrow s \geq 20 \cdot 1,96$$

(iii) $n = ;$ $P(|S_n| < 50) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(-50 < S_n < 50) \geq 0,95 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}} < \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} < \frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow$$

$$\overset{KOO}{\Leftrightarrow} P\left(\frac{-50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}} < Z < \frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) \geq 0,95 \quad , Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{-50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) \geq 0,95 \Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) - 1 \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96) \Leftrightarrow \frac{50}{\sqrt{\frac{25n}{3}}} \geq 1,96 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \geq 1,96 \Leftrightarrow n \leq \left(\frac{10\sqrt{3}}{1,96}\right)^2$$

## ⑥ Σύνοψη του μαθήματος - Τυπικές ασκήσεις

1) Έννοιες Δειγματοχώρου, Πιθανότητας $\longrightarrow$ Μοντελοποίηση

2) Κλασσική Πιθανότητα $\longrightarrow$ Συνδυαστική
#ευνοϊκών, #δυνατών

3) Πειράματα Τύχης σε Στάδια $\xrightarrow{*}$ Υπολογισμοί Πιθ. με Πολλαπλ. Νόμο, Θεώρημα Ολ.Πιθ., τύπος Bayes

4) Διακριτές κ' συνεχείς τ.μ. $\xrightarrow{*}$ Υπολογισμοί Πιθανοτ. E, Var κλπ. όταν η σ.π. η σ.π.π. είναι γνωστή

5) Ιδιότητες E, Var, Cov, ρ $\xrightarrow{*}$ Υπολογισμοί με Θεωρ. Διπλής Μέσης Τιμής κτλ.

6) Ειδικές κατανομές $\longrightarrow$ Υπολογισμοί

7) Πιθανογεννήτριες, Ροπογεννήτριες $\longrightarrow$ Υπολογισμοί (π.χ. ροπογεν. αθρ.), Θεωρητικό

8) Ανισότητες, Νόμος Μεγάλων Αριθμών, ΚΟΘ $\xrightarrow{*}$ Υπολογισμοί Προσεγγιστικοί Πιθαν. με βάση το Κ.Ο.Θ.