ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι
2017-2018
(ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ)

ΑΜΦ24
ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

25-09-2017

ΜΑΘΗΜΑ 1

Μαθηματικοποίηση της Τυχαιότητας

1. Βασικές έννοιες

- Πείραμα τύχης → κατάσταση με αβέβαιο αποτέλεσμα
- (απλό) Αποτέλεσμα → Δειγματικό σημείο
- Σύνολο όλων των αποτελεσμάτων → Δειγματικός χώρος
- Σύνολο αποτελεσμάτων → Ενδεχόμενο
- Αριθμητικό χαρακτηριστικό → Τυχαία μεταβλητή
- Βαθμός βεβαιότητας → Πιθανότητα (αριθμός)

2. Παράδειγμα 1

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ
- Καιρός της επόμενης μέρας

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ
- Βροχή, αίθριος, συνεφ., χιόνι κλπ

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ
- { Βροχή, αίθριος, ... }

ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ
- Καλός καιρός = { αίθριος }

  Κακός καιρός = { συνεφ, βροχή, χιόνι }

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
- P(καλός καιρός) = 40 %

  P(κακός καιρός) = 60 %

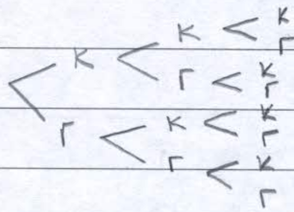
3. Παράδειγμα 2.

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ

- Ρίψη νομίσματος 3 φορές

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

- { ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ }



ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

- "Έρχεται Κ" = { ΚΚΚ, ..., ΓΓΚ }

  " Εμφανίζονται 2 ακριβώς Γ" = { ΓΓΚ, ΓΚΓ, ΚΓΓ }

ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

- Χ = # Κ

4. Έννοιες (διαισθητικές) Πιθανότητας

1) Κλασική πιθανότητα
2) Οριακή σχετική συχνότητα
3) Γεωμετρική πιθανότητα
4) Εμπειρική πιθανότητα

} Μαθηματικοποίηση: Αξιωματική θεμελίωση (Kolmogorov)

5. Κλασική Πιθανότητα

Πεπερασμένος Πληθυσμός

$$P(\underset{\text{ενδεχόμενο}}{\overset{\|}{\text{χαρακτηριστικού}}}) = \frac{\#\ \text{ατόμων με το χαρακτ.}}{\#\ \text{ατόμων πληθυσμού}}$$

κλασική πιθανότητα ≡ Ποσοστό πλήθους με το χαρακτηριστικό

πχ πιθανότητα ένας Έλληνας έχει ύψος ≤ 1.80 = $\dfrac{\#\ \text{Ελλήνων} \leq 1.80}{\#\ \text{Ελλήνων}}$

πχ Ρίψη νομίσματος
3 φορές
"ισοπίθανα" αποτελέσματα

πληθυσμός = { ΚΚΚ, ΚΚΓ, ..., ΓΓΓ }

Η πιθανότητα "έρχονται 2 φορές Γ" $= \frac{3}{8}$

Κλασική Πιθανότητα : Πιθανότητα Ενδεχομένου $= \frac{\#\text{ ευνοϊκών αποτελεσμάτων}}{\#\text{ δυνατών αποτ.}}$

Εγκυρη έννοια αν:
1. τα δειγματικά σημεία (αποτελέσματα) είναι ισοπίθανα.
2. ο δειγμ. χώρος είναι πεπερασμένος.

6. Οριακή σχετική συχνότητα :

Επαναλαμβανόμενο πείραμα τύχης

A ενδεχόμενο

$f(A) =$ σχετική συχνότητα του A σε n επαναλήψεις $= \frac{\#\text{ πραγματοποιήσεων του A}}{n\text{ επαναλήψεις}}$

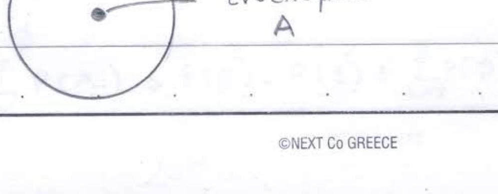
Πιθανότητα του A $= P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(A)$

* Πρόβλημα στην αξιωματική θεμελίωση / Πρόβλημα στην μοντελοποίηση (τα πειράματα τύχης δεν είναι όλα επαναλαμβανόμενα)

7. Γεωμετρική Πιθανότητα :

Εχει νόημα για πειράματα τύχης όπου ο δειγμ. χώρος μπορεί να απεικονιστεί με γεωμετρικό σχήμα.

πχ. ρίχνω βέλος στο στόχο



$P(A) = \frac{\text{εμβαδόν του A}}{\text{εμβαδόν δειγμ. χώρου}}$

8. Εμπειρική Πιθανότητα:

Η πιθανότητα ταυτίζεται με έναν υποκειμενικό βαθμό βεβαιότητας.

πχ Ποια η πιθανότητα να περάσω τις εξετάσεις;

» η Ιλιάδα και η Οδύσσεια να είναι έργο του ιδίου συγγραφέα;

9. Αξιωματικό πλαίσιο Kolmogorov

Χώρος Πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω: σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων

$\mathcal{A}$: οικογένεια ενδεχομένων = υποσύνολο του Ω

P: συνάρτηση πιθανότητας

$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

$A \mapsto P(A)$

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) σ-προσθετικότητας: $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δυο ενδεχόμενα (ασυμβίβαστα)

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

10. Πηγές

Eclass → Πιθανότητες Ι (Οικονόμου)

(Χελιώτης)

(Τρέβεζας)

πλατφόρμα Ανοιχτά ακαδημαϊκά Μαθήματα ΕΚΠΑ

27/09/2017 ΜΑΘΗΜΑ 2

Αξιωματική Θεμελίωση Θεωρίας Πιθανοτήτων - Βασικές Ιδιότητες

1. Αξιωματικό πλαίσιο

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας

δειγμ. χώρος (Ω) — σύνολο ενδεχομένων ($\mathcal{A}$) — συνάρτηση πιθανότητας (P) $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ $\quad A \mapsto P(A)$

Αξιώματα :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_i,\ i = 1,2,3,\ldots$ ξένα ανά δύο, τότε $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ σ-προσθετικότητα

Ιδιότητες :

4. $P(\emptyset) = 0$
5. $P(E^c) = 1 - P(E)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
7. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) \ldots (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \ldots A_n)$

(αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού)

8. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ σ- υποπροσθετικότητα
9. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
10. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$
11. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Αιτιολογήσεις - Αποδείξεις

4. 

$A_1 = \Omega$

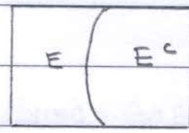
$A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$

$\overset{3.}{\Rightarrow} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \Rightarrow \cancel{P(\Omega)} = \cancel{P(\Omega)} + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

5. $A_1 = E$

$A_2 = E^c$

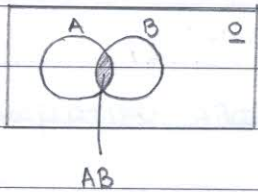


$A_3 = A_4 = \dots = \varnothing$

$\overset{3.}{\Rightarrow} P(\Omega) \overset{2.}{=} P(E) + P(E^c) + \sum_{i=3}^{\infty} \cancel{P(\varnothing)}$

$\Rightarrow P(E^c) = 1 - P(E)$

6.



$$\left.\begin{aligned} A_1 &= AB^c \\ A_2 &= AB \\ A_3 &= A^cB \end{aligned}\right\} \text{ξένα ανά δύο}$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cup B) = P(AB^c) + P(AB) + P(A^cB) \quad (1)$$

Όμως,

$$P(A) = P(\overbrace{AB \cup AB^c}^{\text{ξένα}})$$

$$= P(AB) + P(AB^c) \quad (2)$$

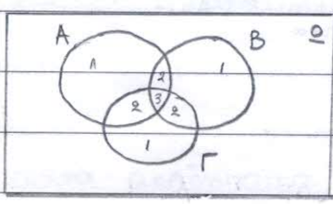
$$P(B) = P(AB \cup A^cB)$$

$$= P(AB) + P(A^cB) \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - \cancel{P(AB)} + \cancel{P(AB)} + P(B) - P(AB)$$

7. Απόδειξη: Επαγωγή στο n χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 6.

Για $n = 3$



$$P(A \cup B \cup \Gamma)$$

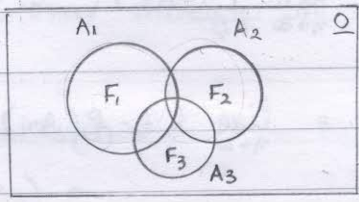
$$= P(A) + P(B) + P(\Gamma)$$

$$- P(AB) - P(A\Gamma) - P(B\Gamma)$$

$$+ P(AB\Gamma)$$

8. $A_1, A_2, A_3, \ldots$

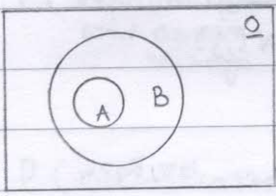
$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \| & \| & \| \\ A_1 & A_2A_1^c & A_3A_1^cA_2^c \end{array}$$



Ισχύει ότι: $F_1, F_2, \ldots$ ξένα ανά δυο

και $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $n = 1, 2, \ldots$

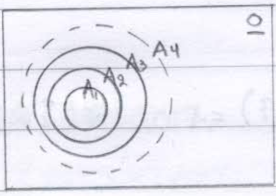
Άρα, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \underset{\uparrow\ F_i \text{ ασυμβίβαστα}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \underset{\uparrow\ F_i \subseteq A_i}{\overset{9.^*}{\leq}} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$



***9.** $A \subseteq B \Rightarrow B = \underbrace{A \cup BA^c}_{\text{ξένα}}$

$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(BA^c) \overset{1.}{\leq} P(A)$

10.

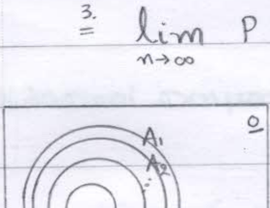


$$\begin{array}{cccc} A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \\ \| & \| & \| & \| \\ A_1 & A_2A_1^c & A_3A_2^cA_3^c & A_4A_3^cA_2^cA_1^c \\ & & \| & \| \\ & & A_3A_2^c & A_4A_3^c \end{array}$$

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) \overset{3.}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(F_i)$

$\overset{3.}{=} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_i)$

11.



$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$

$\Rightarrow A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq A_3^c \ldots$

$\overset{10.}{\Rightarrow} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$

Όμως, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c$

$$\Rightarrow P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n))$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

2. Πόρισμα - Κλασική Πιθανότητα

1. $A_1, A_2, \dots, A_n$ ασυμβίβαστα $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$
και ισοπίθανα $(P(A_i) = P(A_j),\ \forall i,j)$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = B$$

$$\Downarrow$$

$$P(A_i) = \frac{P(B)}{n}$$

2. Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ και $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_n\})$
τότε,

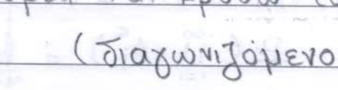
$$P(E) = \frac{\#\ \text{στοιχείων του } E}{\#\ \text{στοιχείων του } \Omega}$$

Απόδειξη:

1. $P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\text{ασυμβ.}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \overset{\text{ισοπιθ.}}{=} n \cdot P(A_i)$

3. Το δίλημμα του Monty Hall

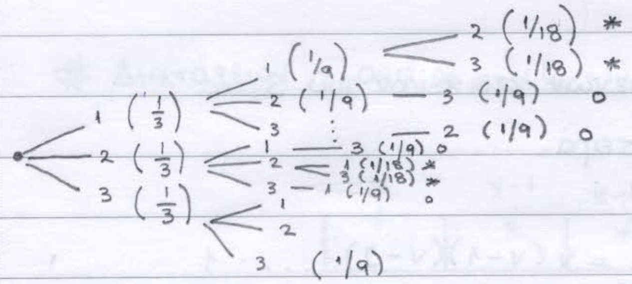
Εχουμε 3 πόρτες



και τα εξής βήματα:

1. κρυφά επιλέγω πόρτα και κρύβω το δώρο (παρουσιαστής)
2. Επιλογή πόρτας (διαγωνιζόμενος)
3. άνοιγμα μη επιλεγμένης πόρτας (παρουσ.)

Διαγωνιζόμενος
- μένει πιστός στην επιλογή του *
- αλλάζει επιλογή o



$$P(\text{κερδίσει μένοντας στην αρχική επιλογή}) = \sum_{i=1}^{n} P(*) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{κερδίσει αλλάζοντας}) = \sum_{i=1}^{n} P(o) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

29/09/2017 **ΜΑΘΗΜΑ 3**

Στοιχεία συνδυαστικής για Πιθανότητες

1. Έννοια της συνδυαστικής είναι καταμέτρηση σχηματισμών = σύνολο με δομή.

2. **Κλασικοί σχηματισμοί**

- μεταθέσεις (κλασικές, πολλών ειδών στοιχείων)
- διατάξεις (χωρίς επαναλ., με επαναλ.)
- συνδυασμοί (χωρίς επαναλ., με επαναλ.)

3. Απαρίθμηση κλασικών σχημ.

$S = \{ s_1, s_2, \dots, s_\nu \}$

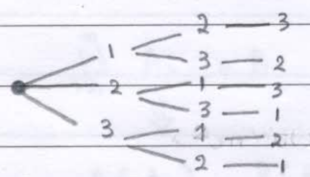
Α. ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΤΟΥ S

= Διατεταγμένη ν-άδα διακεκριμένων στοιχείων του S

= "βάζω" τα στοιχεία του S σε σειρά.

$\#$ Μεταθέσεων ν στοιχείων $= \nu! = \nu(\nu-1)(\nu-2) \cdot \dots \cdot 1$

πχ Αν $S = \{1, 2, 3\}$



$(1\,2\,3)$
$(1\,3\,2)$
$(2\,1\,3)$
$(2\,3\,1)$
$(3\,1\,2)$
$(3\,2\,1)$

$\Bigg\}$ $\#$ επιλογών $= 3 + 2 + 1 = 6$

Απόδειξη:

Μια μετάθεση γίνεται σε ν-στάδια

1ο Επιλογή $1^{ου}$ στοιχείου $\rightarrow \nu$ επιλογές

2ο » $2^{ου}$ » $\rightarrow \nu-1$ επιλογές

3ο » $3^{ου}$ » $\rightarrow \nu-2$ επιλογές

⋮

νο » $\nu^{ου}$ » $\rightarrow 1$ επιλογή

Από πολλαπλασιαστική αρχή $\#$ μεταθέσεων ν στοιχείων $= \nu(\nu-1)(\nu-2) \cdot \dots \cdot 1$

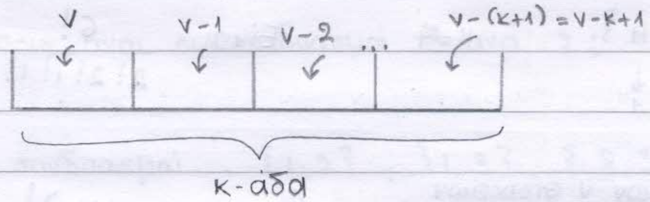
ν	ν-1	ν-2	...	1

Β. ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΟΥ S, ν ΑΝΑ κ.

= Διατεταγμένη κ-άδα διακεκριμένων στοιχείων του S

= "βάζω κ-στοιχεία διακεκριμένα του S σε σειρά"

$\#$ Διατάξεων ν ανά κ $= \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\kappa+1) = \dfrac{\nu!}{(\nu-\kappa)!} = (\nu)_\kappa$



$(1 \le \kappa \le \nu)$

Γ. ΔΙΑΤΑΞΗ ν ΑΝΑ κ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

= Διατεταγμένη κ-άδα στοιχείων του S

= "Βάζω κ στοιχεία του S σε σειρά με δυνατότητα επανάληψης"

$\#$ Διατάξεων ν ανά κ με επανάληψη $= \nu^\kappa$

Δ. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ν ΑΝΑ κ.

= Μη διατεταγμένη κ-άδα διακεκριμ στοιχείων του S

= Υποσύνολο του S με κ-στοιχεία

= "Επιλέγω κ στοιχεία του S."

$\#$ συνδυασμών ν ανά κ $= \binom{\nu}{\kappa} = \dfrac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$ $(1 \le \kappa \le \nu)$

Απόδειξη:

1 συνδυασμός ν ανά κ του S $\xrightarrow{\text{παίρνω}}$ κ! διατάξεις ν ανά κ

$\Downarrow$

($\#$ συνδυασμών ν ανά κ) $\times \kappa! = \#$ διατάξεων ν ανά κ $= \dfrac{\#\text{ διατάξεων ν ανά κ}}{\kappa!}$

Ε. ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΤΟΥ S ν ΑΝΑ κ, $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_\nu$

= Διατεταγμένη $(\kappa_1 + \ldots + \kappa_\nu)$-άδα του S όπου το S_i εμφανίζεται κ_i φορές, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

= " Βάζω σε σειρά κ_1 αντίγραφα του S_1

κ_2 " του S_2, ... "

πχ Με πόσους τρόπους μπαίνουν 3 ● και 2 ○ στη σειρά;

Είναι $\dfrac{(3+2)!}{3!\,2!} = \dfrac{5!}{3!\,2!}$

πχ Ποιο είναι το # των αναγραμματισμών της λέξης ΑΛΛΑΓΗ

$S = \{ \underset{2}{A}, \underset{2}{\Lambda}, \underset{1}{\Gamma}, \underset{1}{H} \}$ $\quad v=4 \quad$ Είναι $\dfrac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!}$

Γενικά, $\#$ μεταθέσεων ν στοιχείων ανά $k_1, k_2, \dots, k_v$ $= \dfrac{(k_1+k_2+\dots+k_v)!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_v!}$

Απόδειξη:

Μια μετάθεση των στοιχείων του S με k_i εμφανίσεις του S_i, $i=1,2,\dots,v$ φτιάχνεται σε ν-στάδια:

1^o στάδιο: Επιλογή θέσεων για το S_1 $= \dbinom{k_1+k_2+\dots+k_v}{k_1}$

2^o στάδιο: » » το $S_2 = \dbinom{k_2+k_3+\dots+k_v}{k_2}$

⋮

v^o στάδιο: » » το $S_v = \dbinom{k_v}{k_v}$

Άρα, από πολλ/κη αρχή:

$$\#\text{ μεταθέσεων ν ανά } k_1,k_2,\dots,k_v = \binom{k_1+k_2+\dots+k_v}{k_1}\binom{k_2+k_3+\dots+k_v}{k_2}\cdots\binom{k_{v-1}+k_v}{k_{v-1}}\binom{k_v}{k_v}$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\dots+k_v)!}{k_1!\,\cancel{(k_2+k_3+\dots+k_v)!}} \cdot \frac{\cancel{(k_2+k_3+\dots+k_v)!}}{k_2!\,\cancel{(k_3+\dots+k_v)!}} \cdots \frac{\cancel{(k_{v-1}+k_v)!}}{k_{v-1}!\,\cancel{k_v!}} \cdot \frac{k_v!}{k_v!\,0!}$$

$$= \frac{(k_1+k_2+\dots+k_v)!}{k_1!\,k_2!\,\dots\,k_v!}$$

ΣΤ. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ν ΑΝΑ κ ΜΕ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

= Μη διατεταγμένη κ-άδα του S με πιθανές επαναλήψεις στοιχείων.

= "Επιλέγω κ στοιχεία από το S με επανάληψη"

$$\#\,\substack{\text{συνδυασμών } \nu \text{ ανά } \kappa \\ \text{με επανάληψη}} = \begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$$

πχ $S=\{1,2,3\}$ ποιοι είναι οι συνδυασμοί 3 ανά 2;

Είναι οι απλοί συνδυασμοί $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$

$+\ \{1,1\}$, $\{2,2\}$, $\{3,3\}$ (με επανάληψη)

Απόδειξη:

Συνδυασμός ν ανά κ με επανάληψη

$\updownarrow$

Λύση της εξίσωσης $x_1+x_2+\dots+x_\nu=\kappa$, όπου $x_i \geq 0$ ακέραιος

$x_i = \#$ εμφανίσεων του S_i

$\updownarrow$

Μετάθεση 2 ειδών στοιχείων

"1" "0" με "1" $\rightarrow \nu-1$ εμφανίσεις

"0" $\rightarrow \kappa$ εμφανίσεις

$$\#\,\substack{\text{συνδυασμών } \nu \text{ ανά } \kappa \\ \text{με επανάληψη}} = \#\,\substack{\text{μεταθέσεων} \\ \text{"1"} \rightarrow \nu-1 \\ \text{"0"} \rightarrow \kappa \text{ εμφ}} = \frac{(\nu+\kappa-1)!}{(\nu-1)!\,\kappa!} = \binom{\nu+\kappa-1}{\kappa}$$

Παράδειγμα:

$S=\{1,2,3,4\}$ δηλ: $\{1,1,1,2,4\}$

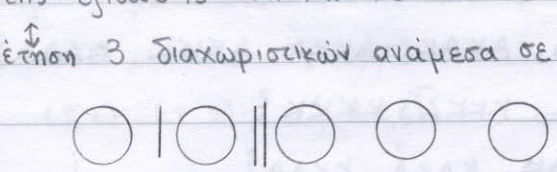
Συνδυασμός 4 ανά 5
με επανάληψη

$\updownarrow$

Λύση της εξίσωσης $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ $(3,1,0,1)$

$\updownarrow$

Τοποθέτηση 3 διαχωριστικών ανάμεσα σε 5 σφαιρίδια



$(1,1,0,3)$

$(0,0,0,5)$

02/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 4

Ασκήσεις στην Κλασική Πιθανότητα

1. **Πλαίσιο**

Ω δειγμ. χώρος πεπερασμένος

με ισοπίθανα δειγμ. σημεία

$$P(E) = \frac{\#\ \text{στοιχείων του } E}{\#\ \text{στοιχείων του } \Omega} = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}}$$

- Κατάλληλος ορισμός δειγμ. χώρου ώστε τα δειγμ. σημεία να είναι ισοπίθανα.
- Υπολογισμός # στοιχείων E, Ω.

2. **Άσκηση** (φύλο παιδιών σε οικογένεια με 4 παιδιά)

Πείραμα τύχης: Επιλογή οικογένειας με 4 παιδιά

$P(\underbrace{2-2}_{E_1}) = ;$ $P(\underbrace{3-1}_{E_2}) = ;$

- 1^{η} επιλογή δειγμ. χώρου:

$\Omega = \{0-4,\ 1-3,\ 2-2\}$

$E_1 = \{2-2\}$

$E_2 = \{1-3\}$

- 2^{η} επιλογή δειγμ. χώρου:

$\Omega = \{0A, 1A, 2A, 3A, 4A\}$

$E_1 = \{2A\}$

$E_2 = \{1A, 3A\}$

- 3^{η} επιλογή δειγμ. χώρου:

$\Omega = \{$AAAA, AAAK, AAKA, AKAA, AKAK, AKKA, AKKK, KAAA, KAAK, KAKA, KAKK, KKAA, KKAK, KKKA, KKKK$\}$

$E_1 = \{$AAKK, AKAK, AKKA, KAAK, KAKA, KKAA$\}$

$E_2 = \{$AAAK, ..., KKKA$\}$

Από τους 3 υποψήφιους δ.χ. όλοι μοντελοποιούν τα ενδεχόμενα E_1, E_2.
Όμως, τα δειγμ. σημεία δε φαίνονται ισοπίθανα στις επιλογές 1, 2.
Η 3 φαίνεται να ανταποκρίνεται στο μηχανισμό της φύσης.

$$\begin{array}{llll} A & \frac{1}{2} & AA & \frac{1}{4} \\ & & AK & \frac{1}{4} \\ K & \frac{1}{2} & KA & \frac{1}{4} \quad \ldots \\ & & KK & \frac{1}{4} \end{array}$$

Δεχόμενοι την $3^η$ επιλογή δ.χ. (ισοπίθανα δειγμ. σημεία)

$$P(E_1) = \frac{\#\text{ στοιχείων } E_1}{\#\text{ στοιχ. } \underline{\Omega}} = \frac{\#\text{ μεταθέσεων 2 ειδών στοιχ.}}{\#\text{ διατάξεων 2 ειδών στοιχ. ανά 4 με επαναλ.}} \quad \begin{array}{l} A \to 2 \text{ φορές} \\ K \to 2 \text{ φορές} \end{array}$$

$$= \frac{\frac{(2+2)!}{2!\,2!}}{2^4} = \frac{\frac{4!}{2 \cdot 2}}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(E_2) = \frac{\frac{(3+1)!}{3!\,1!} + \frac{(1+3)!}{1!\,3!}}{2^4} = \frac{1}{2}$$

3. Παράδειγμα (ρίψη 2 ζαριών)

Αν τα ζάρια είναι όμοια σε ρίψη 2 ζαριών ο φυσικός δειγμ. χώρος είναι το σύνολο επαναλ. συνδυασμών 6 ανά 2.

$$\underline{\Omega} = \{ \{1,1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,6\}$$
$$\{2,2\}, \ldots, \{2,6\}$$
$$\{3,3\}, \ldots, \{6,6\} \}$$

Αυτός ο δειγμ. χώρος δεν υπάρχει λόγος να έχει ισοπίθανα δειγμ. σημεία.
Για να έχω ισοπίθανα δειγμ. σημεία, ο κατάλληλος δ.χ. είναι το σύνολο των διατάξεων με επανάληψη 6 ανά 2

$$\underline{\Omega} = \{ (1,1), (1,2), \ldots, (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), \ldots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), (6,2), \ldots, (6,6) \}$$

*ΔΕΥΤΕΡΑ + ΤΕΤΑΡΤΗ (ΑΜΦ22)

Με αυτό το δ.χ.

$P(\text{ασσόδυο}) = P(\{1,2\},\{2,1\}) = \frac{2}{36}$

$P(\text{εξάρες}) = P(\{6,6\}) = \frac{1}{36}$

4. Επιλογή δ.χ.

Σε πειράματα τύχης με συνδυαστικό χαρακτήρα (πολλά στάδια), ο δ.χ. πρέπει να επιλέγεται ως το σύνολο των διατάξεων.

5. Το πρόβλημα των γενεθλίων

Έστω ότι όλα τα έτη έχουν 365 μέρες.

Ποιο είναι το ελάχιστο n ώστε:

$P(\underbrace{\text{μεταξύ } n \text{ ατόμων } \exists \text{ τουλ. 2 με γενέθλια την ίδια μέρα}}_{A}) \geq \frac{1}{2}$;

Έστω n άτομα. Εξετάζω τις μέρες των γενεθλίων τους.

Δειγμ. σημεία = n-άδα από ημέρες (1-365)

πχ $n=3$ (1, 33, 35)

1: 1η Ιανουαρίου

33: 2α Φεβρουαρίου

35: 4η Φεβρουαρίου

Ισοπίθανα δειγμ. σημεία

Ω = Σύνολο n-άδων από ημέρες (1-365)

Διατάξεις 365 ανά n

$P(A) = 1 - P(\underbrace{\text{n άτομα έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες}}_{A^c}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$

Διατάξεις 365 ανά n με επανάληψη

n	πιθανότητα ∃ 2 μεταξύ των n με ίδια γενέθλια
2	1/365
⋮	
20	0,411
⋮	
→ 23	0,507 ≈ 1/2
⋮	
50	0,970

6. Παιχνίδι Chuck-a-Luck.

Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μία ένδειξη ζαριού.
Ένα δίκαιο ζάρι ρίχνεται 3 φορές.
Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί τουλ. μία φορά η ένδειξη που στοιχημάτισε.

P(κερδίζει ο παίκτης) = ;

Λύση: Έστω ότι ο παίκτης στοιχ. το 6

Δειγμ. χώρος: $\underline{\Omega} = \{ (i, j, k) : i, j, k \in \{1, \dots, 6\} \}$ με ισοπίθανα δειγμ. σημεία

E = { κερδίζει ο παίκτης } = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, όπου A_i: εμφανίζεται το "6" στην i ρίψη

Άρα,

$$P(E) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$$

$$= \frac{6^2}{6^3} + \frac{6^2}{6^3} + \frac{6^2}{6^3} - \frac{6}{6^3} - \frac{6}{6^3} - \frac{6}{6^3} + \frac{1}{6^3} = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{216} = \dots = \frac{91}{216}$$

2η Λύση:

$$P(E) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c)$$
$$= 1 - P(A_1^c A_2^c A_3^c)$$
$$= 1 - P(\text{να μην εμφανιστεί το 6 στις 3 ρίψεις})$$
$$= 1 - \frac{5^3}{6^3} = 1 - \frac{125}{216} = 91/216.$$

04/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 5

Ασκήσεις στην Κλασική και Γεωμετρική Πιθανότητα

1. Λόττο

① ②		
…		
		(49)

Ενας παίκτης στοιχηματίζει 6 νούμερα 1-49 (διακεκρ)

Κλήρωση 6 από τα 1-49

$$P(\text{εξάρι}) = \frac{6!}{(49)_6} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!\,43!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

$43! \leftarrow (\nu-\kappa)!$

Ευνοϊκό αποτέλεσμα
1^o στάδιο: 6 επιλογές
2^o » : 5 »
⋮

Δυνατό αποτέλεσμα
1^o στάδιο: 49 επιλογές
2^o » : 48 »
3^o » : 47 »
⋮

$$P(\text{πεντάρι}) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}\cdot 6!}{(49)_6} = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}$$

Ευνοϊκό αποτέλεσμα
5 από τα 6 που στοιχημάτισα
και 1 από τα 43 που δεν στοιχημάτισα
Ενα τέτοιο αποτέλεσμα γίνεται σε 3 στάδια:

1^o στάδιο: Επιλογή 5 από τα 6 που στοιχημάτισα $= \binom{6}{5}$

2^o στάδιο: Επιλογή 1 από τα 43 που δεν στοιχ. $= \binom{43}{1}$

3^o στάδιο: Μεταθέσεις των 6 που έχω επιλέξει $= 6!$

2. Χέρι πόκερ

Τράπουλα 52 φύλλων

χρώματα / νούμερα

	A	2	3	… 10 J Q K
♣				
♢				
♡				…
♠				

Αποτέλεσμα = Διατεταγμένη 5άδα φύλλων

Χέρι πόκερ
= 5 φύλλα χωρίς επανάληψη

- καρέ = 4 όμοια νούμερα και 1 διαφορ.
  πχ A ♣, A ♢, A ♡, A ♠, K ♡
- φουλ = 3 + 2 όμοια νούμερα
  πχ. A ♣, A ♢, A ♠, K ♡, K ♠

• τριάρι $= 3+1+1$

• όλα διαφορετικά $= 1+1+1+1+1$

Ευνοϊκό αποτέλεσμα για καρέ (4+1)

• $P(\overset{4+1}{\text{καρέ}}) = \dfrac{13 \cdot 48 \cdot 5!}{(52)_5}$

$= \dfrac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{12}{1}\binom{4}{1} 5!}{(52)_5}$

1ο στάδιο: Επιλογή νούμερου που εμφ 4 φορές = 13 επιλογές

2ο στάδιο: Επιλογή νούμερου που εμφ 1 φορά = 48 επιλογές

3ο στάδιο: Μετάθεση των φύλλων που διαλέξαμε = 5!

• $P(\overset{3+1}{\text{φουλ}}) = \dfrac{\overset{\binom{13}{1}}{13}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2} \cdot 5!}{(52)_5}$

• $P(3+1+1) = \dfrac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{1}^2 \cdot 5!}{(52)_5}$

ΠΡΟΣΟΧΗ! (είναι αυτό και όχι το $\binom{12}{1}\binom{11}{1}$ γιατί εισάγει μια διάταξη που δεν υπάρχει στο πρόβλημα και άρα διπλομετράμε.)

• $P(1+1+1+1+1) = \dfrac{\underset{\text{διαλέγω νούμερο}}{\binom{13}{5}} \underset{\text{διαλέγω χρώμα}}{\binom{4}{1}^5} \cdot 5!}{(52)_5}$ ← και τέλος, τα βάζω στη σειρά.

3. Ρίψη ζαριών

Ρίψη 2 ζαριών

• $P(1^{\eta} \text{ ρίψη} < 2^{\eta} \text{ ρίψη})$

• $P(\text{μεγαλύτερη ρίψη} = k)$, $k = 1, 2, .., 6$

• $P(\text{απόλυτη διαφορά ρίψεων} = k)$, $k = 0, 1, .., 6$

$\Omega =$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)		
3	(3,1)					
4	(4,1)		. . .			
5	(5,1)					
6	(6,1)					(6,6)

• $P(1^{\eta} \text{ ρίψη} < 2^{\eta} \text{ ρίψη}) = \dfrac{5+4+3+2+1}{36}$ ← ό,τι βρίσκεται αυστηρά πάνω απ' τη διαγώνιο

$= \dfrac{15}{36}$

$$\cdot\ P(\text{μεγαλύτερη ρίψη} = k) =$$

$$= P\left(\begin{smallmatrix} 1^{\eta} \text{ ρίψη} = k \\ 2^{\eta} \text{ ρίψη} < k \end{smallmatrix}\right) + P\left(\begin{smallmatrix} 1^{\eta} \text{ ρίψη} < k \\ 2^{\eta} \text{ ρίψη} = k \end{smallmatrix}\right) + P(1^{\eta} \text{ ρίψη} = 2^{\eta} \text{ ρίψη} = k)$$

$$= P(\underbrace{\{(k,1),(k,2),\dots(k,k-1)\}}_{k-1 \text{ στοιχεία}}) + P(\{(1,k),(2,k),\dots,(k-1,k)\}) + P(\{(k,k)\})$$

k στοιχεία

$$= \frac{2(k-1)+1}{36} = \frac{2k-1}{36}, \quad k = 1,2,3,4,5,6$$

$$\cdot\ P\left(\begin{smallmatrix}\text{απόλυτη διαφορά} \\ \text{ρίψεων} = k\end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} 6/36, & k=0 \\ 2(6-k)/36, & 1 \le k \le 5 \end{cases}$$

(ΤΣΕΚΑΡΩ)

Αυτά πρέπει να αθροίζουν στο 1.

Πράγματι, $\dfrac{6 + \sum_{k=1}^{5} 2(6-k)}{36} = \dfrac{6+10+8+6+4+2}{36} = \dfrac{36}{36} = 1$

4. Άνοιγμα πόρτας με κλειδί

Έχω κλειδαριά και ν κλειδιά, όπου 1 από αυτά την ανοίγει (*)

Πείραμα τύχης: Δοκιμάζω k κλειδιά, χωρίς επαναδοκιμή (άρα $k \le \nu$)

Ποια είναι η πιθανότητα να ανοίξει η πόρτα μέχρι την k δοκιμή;

π.χ. $\nu = 100$ P("να ανοίξει") = 90 %

$k = 90$

1η ΛΥΣΗ: (με συνδυαστική)

Ω = k-άδες με κλειδιά $(1, 2, \dots, \nu)$

άρα $P = \dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{\overbrace{\text{k-άδες που σε κάποια θέση έχουν το κλειδί } *}^{k(\nu-1)_{k-1}}}{(\nu)_k = \frac{\nu!}{(\nu-k)!}} = \dfrac{k(\nu-1)_{k-1}}{(\nu)_k}$

$$= \frac{k\,\frac{(\nu-1)!}{\cancel{(\nu-k)!}}}{\frac{\nu!}{\cancel{(\nu-k)!}}} = \frac{k}{\nu}$$

2η ΛΥΣΗ:

Ω = η φορά που θα εμφανιστεί το κλειδί * αν δοκιμάσω και τα ν κλειδιά.

Η ζητούμενη πιθ. είναι $\dfrac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \dfrac{k}{\nu}$ ← k πρώτες προσπάθειες, ν ← όλες οι προσπάθειες