06/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 6

Ασκήσεις στην κλασική κ' Γεωμετρική Πιθανότητα.

1. Πιθανότητα Ένωσης Ενδεχομένων

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_i P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_iE_j) + \sum_{i<j<k} P(E_iE_jE_k)$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\dots E_n)$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)$$

2. Επιλογή αριθμού

Πείραμα τύχης: Επιλογή αριθμού από το 1 ως το 100.

P(" ο αριθμός να διαιρείται με τουλ. έναν από τους 2, 3, 5") = ;

Δειγματ. χώρος $\Omega = \{1, 2, \dots, 100\}$

E_1 : ο αριθμός διαιρείται με το 2

E_2 : » » 3

E_3 » » 5

$$\underbrace{P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)}_{\text{ο αριθμός διαιρείται με το 2 ή 3 ή 5}} = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3) - P(E_2E_3) + P(E_1E_2E_3)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{\lfloor \frac{100}{3} \rfloor}{100} + \frac{\lfloor \frac{100}{5} \rfloor}{100} - \frac{\lfloor 100/6 \rfloor}{100} - \frac{\lfloor 100/15 \rfloor}{100} + \frac{\lfloor \frac{100}{30} \rfloor}{100}$$

$= \dots$

3. Το πρόβλημα του ταιριάσματος (matching problem)
(πρόβλημα συναντήσεων)

Υπάρχουν ν επιστολές : $r_1, r_2, \dots, r_\nu$

ν φάκελοι : $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_\nu$

Οι επιστολές τοποθετούνται τυχαία στους φακέλους

P("καμία επιστολή να μην μπει στον αντίστοιχο φάκελο") = ;

Δειγμ. χώρος : ν-άδες επιστολών = Μεταθέσεις επιστολών

$(\underline{r_2}, \underline{r_1}, \underline{r_3}, \underline{r_8}, \dots, \underline{r_5})$

επιστολή για τον ϕ_1 ... επιστολή για τον ϕ_2 ... επιστολή για τον ϕ_ν

E_i : η επιστολή r_i να μπει στο φάκελό ϕ_i

= η επιστολή r_i να εμφανιστεί στην i-θέση της μετάθεσης

$$P(\text{"καμία επιστολή στο φάκελό της"}) = P(E_1^c E_2^c \dots E_\nu^c)$$
$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} E_i\right)$$
$$= 1 - \sum_i P(E_i) + \sum_{i<j} P(E_i E_j) - \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) + \dots (-1)^\nu P(E_1 E_2 \dots E_\nu)$$

$$P(E_i) = \frac{(\nu-1)!}{\nu!} = \frac{1}{\nu}$$

$$P(E_i E_j) = \frac{(\nu-2)!}{\nu!}, \quad i \neq j$$

$$P(E_i E_j E_k) = \frac{(\nu-3)!}{\nu!}, \quad i \neq j \neq k$$

$$P(E_1 E_2 \dots E_\nu) = \frac{1}{\nu!}$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P_{\text{ζητ}} = 1 - \binom{\nu}{1}\frac{(\nu-1)!}{\nu!} + \binom{\nu}{2}\frac{(\nu-2)!}{\nu!} - \binom{\nu}{3}\frac{(\nu-3)!}{\nu!} + (-1)^\nu \binom{\nu}{\nu}\frac{(\nu-\nu)!}{\nu!} =$$

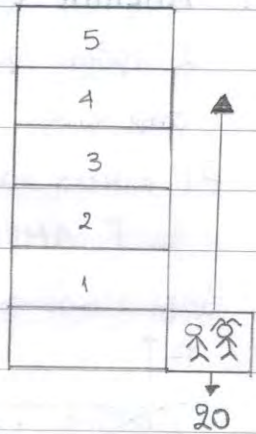
$$= 1 + \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{(\nu-k)!}{\nu!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \frac{\cancel{\nu!}}{(\cancel{\nu-k})!\,k!} \cdot \frac{(\cancel{\nu-k})!}{\cancel{\nu!}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \left(\xrightarrow{\nu \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

4. Άσκηση

20 άτομα ($A_1, A_2, \dots, A_{20}$) αποβιβάζονται σε 5 ορόφους $1, 2, \dots, 5$ τυχαία



P("σε κάθε όροφο να αποβιβαστεί τουλ 1 άτομο") = ;

Πρέπει να διαλέξουμε τη μοντελοποίηση που δίνει ισοπίθανα αποτελέσματα! (όταν εξετάζω πού κατεβαίνει ο καθένας είναι ισοπίθανα, ενώ όταν εξετάζω σε κάθε όροφο ποιοι, τότε δεν είναι.)

5	1	2	5	1	2	...
A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	...

Άρα, Ω = Σύνολο 20άδων $(i_1, i_2, \dots, i_{20})$

i_1: όροφος για το A_1, i_2: όροφος για το A_2, i_{20}: όροφος για το A_{20}

$$P_{\text{ζητ.}} = P\left(\bigcap_{i=1}^{5} E_i\right)$$, E_i: κατεβαίνει τουλ. 1 άτομο στον όροφο i.

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{5} E_i^c\right)$$

$$= 1 - \sum_{i=1} P(E_i^c) + \sum_{i<j} P(E_i^c E_j^c) - \sum_{i<j<k} P(E_i^c E_j^c E_k^c)$$

$$P(E_i^c) = \frac{4^{20}}{5^{20}}, \quad P(E_i^c E_j^c)_{i \neq j} = \frac{3^{20}}{5^{20}}, \quad P(E_i^c E_j^c E_k^c)_{i \neq j \neq k} = \frac{2^{20}}{5^{20}},$$

$$P(E_i^c E_j^c E_k^c E_\ell^c) = \frac{1^{20}}{5^{20}}, \quad i \neq j \neq k \neq \ell$$

Άρα,

$$P_{\text{ζητ}} = 1 - \binom{5}{1}\frac{4^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{2}\frac{3^{20}}{5^{20}} - \binom{5}{3}\frac{2^{20}}{5^{20}} + \binom{5}{4}\frac{1^{20}}{5^{20}}$$

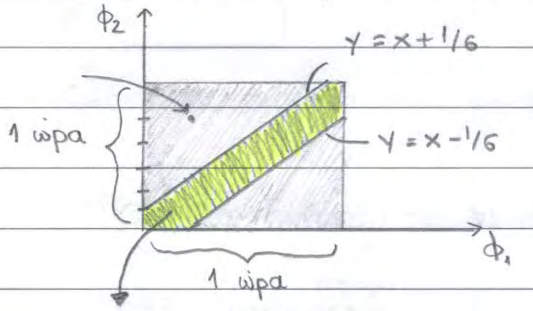
$$= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k} \frac{(5-k)^{20}}{5^{20}}$$

5. Άσκηση (Στήσιμο σε ραντεβού)

2 φίλοι θα συναντηθούν μεταξύ 12:00 - 13:00 επιλέγοντας μια στιγμή στην τύχη.

P("κανείς να μην στήσει τον άλλο πάνω από 10'") = ;

Δειγματικός χώρος $\underline{\Omega} = [0,1]^2$

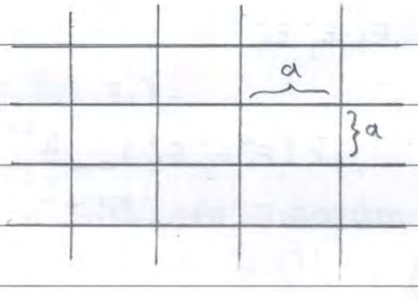


$E = \{(x,y) \in \underline{\Omega} : |x-y| \leq 1/6\}$

$= \{(x,y) : x - 1/6 \leq y \leq x + 1/6\}$
$0 \leq y \leq 1$

$$P(E) = \frac{\text{εμβ} E}{\text{εμβ} \underline{\Omega}} = \frac{1 - (5/6)^2}{1} = \frac{11}{36}$$

6. Άσκηση (Franc - Carceau)

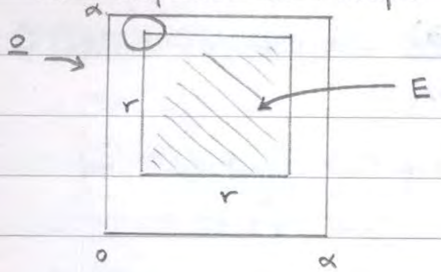


δίσκος ακτίνας $r < a/2$

P("ο δίσκος πέφτει μέσα σε πλακάκι") = ;

Σε ένα πλακάκι επιλέγω τυχαία σημεία.

Αν θεωρήσω το κέντρο του δίσκου ότι πέφτει σε αυτό



$$P(E) = \frac{(\alpha - 2r)^2}{\alpha^2}$$

09/10/2017 **ΜΑΘΗΜΑ 7**

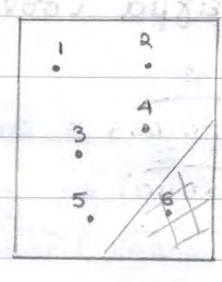
Δεσμευμένη Πιθανότητα

1. Παράδειγμα

P ρίψη ζαριού $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(\text{άρτιος}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{άρτιος} \mid \leq 5) = \frac{2}{5}$



2. Παράδειγμα

Ασφαλιστική εταιρεία

Υποψήφιος ασφαλισμένος

$\nearrow P(\overbrace{\text{επιρρεπής σε ατύχημα}}^{B}) = 0.3$

$\searrow P(\overbrace{\text{μη - επιρρεπής}}^{B^c}) = 0.7$

$P(\overbrace{\text{ατύχημα}}^{A} \mid \overbrace{\text{επιρρεπής}}^{B}) = 0.4 \longrightarrow P(\text{ατύχημα})$

$P(\underbrace{\text{ατύχημα}}_{A} \mid \underbrace{\text{μη επιρρεπής}}_{B^c}) = 0.1$

3. Ορισμός

$A, B \subseteq \Omega$

$P(B) \neq 0$ τότε $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Δεσμευμένη} \\ \text{πιθανότητα του A} \\ \text{δεδομένου του B}}}{P(A|B)} = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

πχ στο ζάρι

$$\underset{\substack{\| \\ A}}{P(\text{άρτιος}} \underset{\substack{\| \\ B}}{\leq 5)} = \frac{P(\overbrace{\{2,4\}}^{AB})}{P(\underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{B})}$$

4. Προσοχή!

$$P(A|B) \neq P(B|A)$$

$$\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad\qquad \frac{P(AB)}{P(A)}$$

5. Παράδειγμα (συνέχεια)

$P(\overbrace{\text{επιρρεπής}}^{1^o}$ κ' $\overbrace{\text{ατύχημα}}^{2^o}) = ;$ $\rightarrow$ $P(AB) = P(B)\cdot P(A|B) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$

$P(\overbrace{\text{ατύχημα}}^{2^o}) = ;$ $\rightarrow$ $P(A) = P(AB \cup AB^c) = P(AB) + P(AB^c) = P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c) = 0,12 + 0,7 = 0,19$

$P(\overbrace{\text{επιρρεπής}}^{1^o} | \overbrace{\text{ατύχημα}}^{2^o}) = ;$ $\rightarrow$ $P(B|A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)} = \dfrac{0,12}{0,19} \simeq 0,65$

Ασφ.

- B επιρρ. 0,3
  - BA επιρ. + ατύχ. $0,3 \cdot 0,4 = 0,12$
  - BA^c επιρ + όχι ατύχ $0,3 \cdot 0,6 = 0,18$
- B^c μη-επιρρ. 0,7
  - B^cA μη-επιρρ + ατύχ. $0,7 \cdot 0,1 = 0,07$
  - B^cA^c μη-επιρρ + όχι ατυχ $0,7 \cdot 0,9 = 0,63$

όλα πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα

↑ 1^o στάδιο ↑ 2^o στάδιο

6. Τα τρία θεωρήματα της δέσμευσης

1) Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$

με $P(E_1 E_2 \ldots E_n) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$P(E_1 E_2 \ldots E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) \cdot P(E_3 | E_1 E_2) \ldots P(E_n | E_1 E_2 \ldots E_{n-1})$$

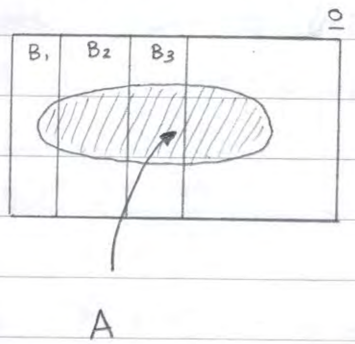
Απόδειξη:

$$P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3 | E_1 E_2) \cdot \ldots \cdot P(E_n | E_1 E_2 \ldots E_{n-1})$$

$$= P(\cancel{E_1}) \frac{P(E_1 \cancel{E_2})}{P(\cancel{E_1})} \cdot \frac{P(E_1 E_2 E_3)}{P(\cancel{E_1 E_2})} \ldots \frac{P(E_1 E_2 \ldots E_n)}{P(E_1 E_2 \ldots E_{n-1})}$$

2) Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

$$\left.\begin{array}{l} A, B_1, B_2, B_3 \ldots \subseteq \Omega \\ \Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \ , \ B_i \cap B_j = \phi \ \ i \neq j \\ P(B_i) > 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A|B_i)$$



Απόδειξη:

$$A = A\Omega = A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i \quad \text{με} \quad (AB_i) \cap (AB_j) = \phi \ , \ i \neq j$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A|B_i)$$

3) Κανόνας / Νόμος του Bayes

A, B με $P(A) > 0$, $P(B) > 0$

τότε,

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$$

Απόδειξη:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot \underbrace{\frac{P(AB)}{P(A)}}_{P(B|A)}$$

7. Χρήση των θεωρημάτων δέσμευσης

Σε πειράματα τύχης με πολλά στάδια

$P(1^\circ \text{ στάδιο}, 2^\circ \text{ στάδιο}, \dots, n^\circ \text{ στάδιο}) \rightarrow$ πολ/κός νόμος

$P(2^\circ \text{ στάδιο}) = \sum_{\substack{\text{εναλλακτικές} \\ 1^{\text{ου}} \text{ σταδίου}}} \left(\substack{\text{εναλλ.} \\ 1^{\text{ου}} \text{ σταδίου}}\right) \cdot P(2^\circ \text{ στάδιο} \mid \;) \rightarrow$ Θ.Ο.Π.

$P(1^\circ \text{ στάδιο} \mid 2^\circ \text{ στάδιο}) \rightarrow$ Bayes (εκ των υστερών πιθ ή aposteriori)

8. Παράδειγμα:

Αιματολογικό τεστ για σπάνια ασθένεια

Πείραμα τύχης:

Ανθρωπος → Ασθενής → Ασθενής, θετικό
Ανθρωπος → Ασθενής → Ασθενής, αρνητικό
Ανθρωπος → Υγιής → Υγιής, θετικό
Ανθρωπος → Υγιής → Υγιής, αρνητικό

1° στάδιο (κατάσταση της υγείας του) — 2° στάδιο (τεστ)

$$P(\overbrace{\text{ασθενής}}^{B}) = \frac{1}{1.000}$$

$$P(\text{αληθώς θετικό}) = P(\overbrace{\text{θετικό}}^{A} \mid \text{ασθενής}) = \frac{99}{100}$$

$$P(\text{ψευδώς θετικό}) = P(\text{θετικό} \mid \text{ασθενής}) = \frac{2}{100}$$

Για να είναι καλό το τεστ, με ενδιαφέρει η:

$$P(\underbrace{\text{ασθενής}}^{B} \mid \underbrace{\text{θετικό}}^{A}) = ;$$

$P(B) = 1/1000$

$P(A|B) = 99/100$

$P(A|B^c) = 2/100$

$P(B|A) = ;$

Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \frac{1/1000 \cdot 99/100}{P(A)}$$

Για να βρω το P(A), παίρνω Θ.Ο.Π.

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c)$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{2}{100}$$

$$= \frac{2097}{100.000}$$

Άρα,

$$P(B|A) = \frac{99/100.000}{2097/100.000} = \frac{99}{2097} \simeq 0,04 \quad \text{Κακό τεστ}$$

Ερμηνεία:

πχ.

Πληθυσμός 100.000 → 100 ασθενείς → 99 ασθ, θετικό; 1 ασθ, αρνητικό

Πληθυσμός 100.000 → 99.900 υγιείς → 1.998 υγιείς, θετικό; ≃ 98.000 υγιείς, αρνητικό

$$P(\text{ασθ} \mid \text{θετ}) = \frac{99}{99+1998} = \text{πολύ μικρό}$$

Και εδώ, $P(A|B) \neq P(B|A)$