11/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 8.

Ασκήσεις στη Δεσμευμένη Πιθανότητα

1. Βασικά αποτελέσματα

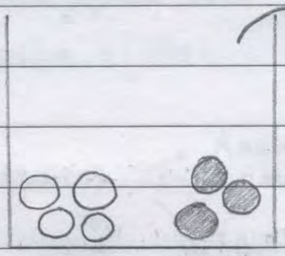
(i) $P(E_1 E_2 \dots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1) \dots P(E_n | E_1 \dots E_{n-1})$

(ii) B_i διαμέριση του Ω $\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1} P(B_i)P(A|B_i)$

(iii) $P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A)$

2. Άσκηση

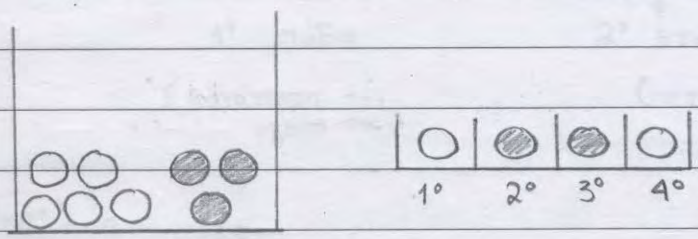
Επιλογή σφαιριδίων από κάλπη



n Λ m M

εξάγω k σφαιρίδια

- με επανάθεση (βλέπω κ' βάζω πίσω)
- χωρίς επανάθεση



n = 5 m = 3

1° 2° 3° 4°

χωρίς επανάθεση

$$P(1°, 4°\ A;\ 2°, 3°\ M) = \underset{\overset{\|}{\frac{5}{8}}}{P(1°\ Λ)} \cdot \underset{\overset{\|}{\frac{3}{7}}}{P(2°\ M | 1°\ Λ)} \cdot \underset{\overset{\|}{\frac{2}{6}}}{P(3°\ M | 1°\ Λ, 2°\ M)} \cdot \underset{\overset{\|}{\frac{4}{5}}}{P(4°\ M | 1°\ Λ, 2°\ M, 3°\ M)}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}$$

Εναλλακτικά, με κλασσική πιθανότητα

$$P(1^\circ, 4^\circ\ \Lambda,\ 2^\circ, 3^\circ\ M) = \frac{5\cdot 3\cdot 2\cdot 4}{(8)_4}$$

3. Άσκηση

Μοίρασμα τράπουλας 52 φύλλων

A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K

♣

◊

♡

♤

Πείραμα τύχης: Μοίρασμα σε 4 παίκτες

→ 13 φύλλα ο καθένας

P("κάθε παίκτης παίρνει 1 A") = ;

1η λύση (συνδυαστική):

$$P(\text{κάθε παίκτης από } 1A) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{4\binom{48}{12}\cdot 3\binom{36}{12}\cdot 2\binom{24}{12}\cdot 1\cdot\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = *$$

Αποτέλεσμα = (Σύνολο φ του $1^{ου}$, Σύνολο φ του $2^{ου}$, Σύνολο φ του $3^{ου}$, Σύνολο φ του $4^{ου}$)

$$\overset{*}{=} \frac{4!\ \dfrac{48!}{12!\,\cancel{36!}}\cdot\dfrac{\cancel{36!}}{12!\,\cancel{24!}}\cdot\dfrac{\cancel{24!}}{12!\,12!}}{\dfrac{52!}{13!\,\cancel{39!}}\cdot\dfrac{\cancel{39!}}{13!\,\cancel{26!}}\cdot\dfrac{\cancel{26!}}{13!\,13!}}$$

$$= \frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 13^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{52}\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = \frac{3\cdot 2\cdot 13^3}{51\cdot 50\cdot 49} = \frac{39\cdot 26\cdot 13}{51\cdot 50\cdot 49}$$

2^{η} Λύση (συνδ + πολ/κος νόμος):

P(κάθε παίκτης από 1 A) =

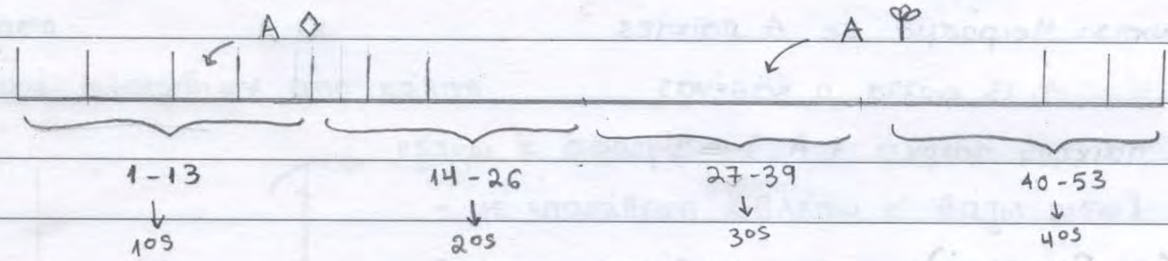
P(ο 1^{os} παίρνει A) · P(ο 2^{os} παίρνει A | ο 1^{os} πήρε A) ·

P(ο 3^{os} παίρνει A | ο 1^{os}, 2^{os} πήραν A) · P(ο 4^{os} παίρνει A | ο 1^{os}, 2^{os}, 3^{os} πήραν A) =

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}} = \text{το ίδιο με το προηγούμενο}$$

3^{η} Λύση (πολ/κος νόμος μόνο):

Αποτέλεσμα = Μετάθεση των φύλλων



P(όλοι παίρνουν 1 A)

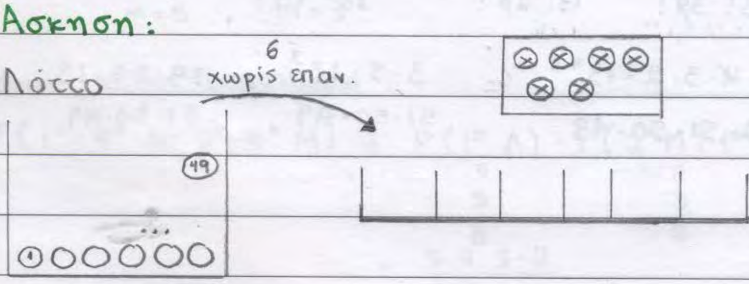
= P(ο A♢ δεν πέφτει στην ίδια $13^{αδα}$ με τον A♣)

· P(ο A♡ » » με τους A♢, A♣)

· P(ο A♠ » » με τους A♡, A♢, A♣)

$$= \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \quad (\text{το ίδιο})$$

4. Άσκηση:



P(εξάρι στο Λόττο) = ;

1η Λύση (Συνδ. με διατάξεις):

$$P(6\ \text{άρι}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{6!}{(45)_6}$$

2η Λύση (Συνδ. με συνδυασμούς):

$$P(6\ \text{άρι}) = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

3η Λύση (πολ/κος νόμος):

$$P(6\ \text{άρι}) = \frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{1}{44} \quad (\text{το ίδιο})$$

5. Άσκηση

Πρόβλημα γενεθλίων

Εστω ότι όλα τα έτη έχουν 365 μέρες.

ν άτομα

$p = P$(όλοι έχουν γενέθλια σε διαφ. μέρα) = ;

1η Λύση (συνδ):

$$p = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{(365)_\nu}{365^\nu} = \frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot \ldots \cdot(365-\nu+1)}{365^\nu}$$

Αποτέλεσμα = διατεταγμένη ν-άδα ημερομηνιών

1ο 2ο ... νο

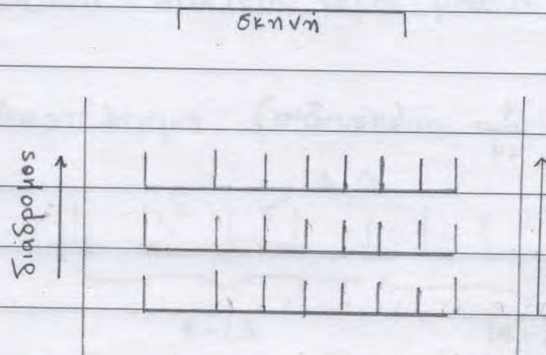
$2^{η}$ Λύση (πολ/κος νόμος):

$$P = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(v-1)}{365} = \frac{(364)_{v-1}}{365^{v-1}} \quad (\text{το ίδιο})$$

π.θ. ο $2^{ος}$ γενέθλια διαφορ. του $1^{ου}$

6. Άσκηση (δεν πέφτει τόσο δύσκολη)

Θέατρο με 7 καθίσματα σε κάθε σειρά



p = P(να μην χρειαστεί να περάσει κάποιος μπροστά από άλλον για να καθίσει στη θέση του) = ;

Ονομάζω τους θεατές κάθε σειράς κατά αύξουσα σειρά προσέλευσης: 1, 2, ..., 7

Αποτέλεσμα = Μετάθεση

| 7 | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 | 6 | όχι ευνοϊκό

| 7 | 5 | 4 | 1 | 2 | 3 | 6 | ευνοϊκό

$1^{η}$ Λύση (συνδ):

$$P = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{2^6}{7!}$$

ευνοϊκή = μετάθεση ↘ ↗

φθίνουσα μέχρι το 1 και αύξουσα μετά

άρα πόσες ευνοϊκές υπάρχουν με το 1 στην

$1^{η}$ θέση; $\rightarrow \binom{6}{0}$

» » »

$2^{η}$ θέση; $\rightarrow \binom{6}{1}$

» » »

$3^{η}$ θέση; $\rightarrow \binom{6}{2}$

$4^{η}$ θέση; $\rightarrow \binom{6}{3}$

$5^{η}$ θέση $\rightarrow \binom{6}{4}$

$6^{η}$ $\rightarrow \binom{6}{5}$

$7^{η}$ $\rightarrow \binom{6}{6}$

Τελικά, ευνοϊκές $= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \dots + \binom{6}{6} = 2^6$

2η Λύση (πολ/κος νόμος):

$$p = \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2} = \frac{2^6}{7!}$$

13/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 9

Ασκήσεις στη Δεσμευμένη Πιθανότητα

1. Άσκηση (Τεστ πολλαπλών επιλογών)

1 Ερώτηση με m επιλογές (1 Σ, $m-1$ Λ)

Το ποσοστό αυτών που γνωρίζουν την σωστή απάντηση $= p$

P(γνώριζε, απάντησε σωστά) $=;$ $\rightarrow P(\text{γνωρ.})\,P(\Sigma|\text{γνωρ}) = p\cdot 1$

P(απάντησε σωστά) $=;$ $\rightarrow P(\text{γνωρ})\cdot P(\Sigma|\text{γνωρ}) + P(\text{δεν γνωρ})\cdot P(\Sigma|\text{δεν γνωρ}) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot\frac{1}{m}$

P(γνώριζε | απάντησε σωστά) $=;$

$\hookrightarrow P(\text{γνωρ})/_{P(\Sigma)}\cdot P(\Sigma|\text{γνωρ}) = \dfrac{p}{p+(1-p)/m}$

Πείραμα τύχης 2 σταδίων:

- Γνωρίζει $p \rightarrow \Sigma$ $p\cdot 1$
- Δε γνωρίζει $1-p$
  - $\rightarrow \Sigma$ $(1-p)\cdot 1/m$
  - $\rightarrow \Lambda$ $(1-p)\cdot(m-1)/m$

  αθροίζουν στο $1-p$

αθροίζουν στο 1

2. Άσκηση (Πολιτική Αντιπαράθεση)

Πολιτικός Α : Μόνο το 10% των ατυχημάτων προκαλούνται από μεθυσμένους οδηγούς

Άρα, θα πρέπει η οδήγηση υπό μέθη να επιτρέπεται.

Πολιτικός Β: Μόνο το 1 % οδηγούν μεθυσμένοι.

Πολιτικός Α: ;;;

P(ατύχημα | μεθ) = ;

P(ατύχημα | νηφ) = ;

Πείραμα τύχης 2 σταδίων:

- Μεθυσμένος
  - ατύχημα
  - όχι ατύχημα
- Νηφάλιος
  - ατύχημα
  - όχι ατύχημα

$P(\text{μεθ} \mid \text{ατυχημα}) = 0.1$ (πολιτικός Α)

$P(\text{μεθ}) = 0.01$ (πολιτικός Β)

$P(\text{νηφ}) = 0.99$ $(1 - P(\text{μεθ}))$

$$\frac{P(\text{ατύχημα} \mid \text{μεθ})}{P(\text{ατύχημα} \mid \text{νηφ})} \underset{\uparrow \text{ Bayes}}{=} \frac{\dfrac{\cancel{P(\text{ατυχ})} \cdot P(\text{μεθ} \mid \text{ατυχ})}{P(\text{μεθ})}}{\dfrac{\cancel{P(\text{ατυχ})} \cdot P(\text{νηφ} \mid \text{ατυχ})}{P(\text{νηφ})}} = \frac{\dfrac{0.1}{0.01}}{\dfrac{0,9}{0,99}} \simeq 11$$

3. Άσκηση (Επιτυχία στις εξετάσεις)

- Φοιτητής
  - P(Πραγμ Αν) = 50 % P(περάσει | πραγμ) = 50 %
  - P(Πληροφ Ι) = 50 % P(περάσει | πληροφ) = 40 %

↑ 1° στάδιο: τι μάθημα θα δώσει

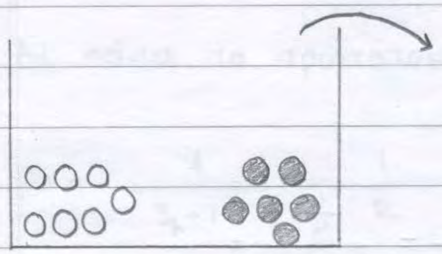
↑ 2° στάδιο: περνάει ή κόβεται

$$P(\text{πραγμ}, \text{περάσει}) \overset{\text{πολ/κος νόμος}}{=} ; \rightarrow P(\text{πραγμ}) \cdot P(\text{περ} | \text{πραγμ}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

$$P(\text{περάσει}) \overset{\text{θ.ο.π}}{=} ; \rightarrow P(\text{πραγμ}) \cdot P(\text{περ} | \text{πραγμ}) + P(\text{πληρ}) \cdot P(\text{περ} | \text{πληρ}) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}45$$

$$P(\text{πραγμ} | \text{πέρασε}) \overset{\text{Bayes}}{=} ; \rightarrow \frac{P(\text{πραγμ})}{P(\text{περ})} \cdot P(\text{περ} | \text{πραγμ}) = \frac{0{,}5}{0{,}45} \cdot 0{,}5 = \frac{0{,}25}{0{,}45} = 0{,}555\ldots$$

4. Άσκηση (Εξαγωγή σφαιριδίων από κάλπη)



εξάγω k σφαιρίδια χωρίς επανάθεση

m Λ $\quad$ n Μ

$$P(1^o \text{ Λ}, \text{ συνολικά } \underbrace{r}_{1 \le r \le k} \text{ Λ}) = ; \rightarrow P(1^o \text{ Λ}) \cdot P(\text{συνολ. } r \text{ Λ} | 1^o \text{ Λ})$$

$$= \frac{m}{m+n} \cdot P\begin{pmatrix} \text{να εμφ } r-1 \text{ Λ} \\ \text{σε } k-1 \text{ εξαγ} \\ \text{από } m-1 \text{ Λ και} \\ n \text{ Μ} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m}{m+n} \cdot \frac{\binom{m-1}{r-1}\binom{n-r}{k-2}}{\binom{m+n-1}{k-1}}$$

$$P(\overset{\text{συνολικά}}{r \text{ Λ}}) = ; \rightarrow \frac{\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}}{\binom{m+n}{k}}$$

$$P(1^o \text{ Λ} | \text{ συνολικά } r \text{ Λ}) = ;$$

$$\hookrightarrow \frac{P(1^o \text{ Λ})}{P(\text{συν. } r \text{ Λ})} \cdot P(\text{συν. } r \text{ Λ} | 1^o \text{ Λ}) = \frac{\dfrac{\binom{m-1}{r-1}\cancel{\binom{n}{k-r}}}{\binom{m+n-1}{k-1}}}{\dfrac{\binom{m}{r}\cancel{\binom{n}{k-r}}}{\binom{m+n}{k}}} \overset{*}{=} \frac{\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m+n}{k}}{\frac{m}{r}} = \frac{r}{k}$$

*Χρήσιμος τύπος:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Απόδ:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

5. Άσκηση ***

Οικογένεια με 2 παιδιά

$p_1 = P($το άλλο παιδί κορίτσι | το ένα παιδί Κ$) = ;$

$p_2 = P($το άλλο Κ | το πρωτότοκο είναι Κ$) = ;$

Πάω στο σπίτι
και ανοίγει ένα παιδί

$p_3 = P($το άλλο Κ | ανοίγει Κ$)$

Για το 1,2: $\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$

$$\begin{array}{cccc} AA & AK & KA & KK \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}$$

$$p_1 = P(\{KK\} \mid \{AK, KA, KK\}) = \frac{P(\{KK\})}{P(\{AK, KA, KK\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$p_2 = P(\{KK\} \mid \{KA, KK\}) = \frac{1}{2}$$

Για το 3: έχω πείραμα 2 σταδίων

AA	$\frac{1}{4}$	→ (AA, ανοίγει A)	$\frac{1}{4}\cdot 1$
AK	$\frac{1}{4}$	(AK, ανοίγει A)	$\frac{1}{4}p$
		(AK, ανοίγει K)	$\frac{1}{4}(1-p)$
KA	$\frac{1}{4}$	(KA, ανοίγει A)	$\frac{1}{4}q$
		(KA, ανοίγει K)	$\frac{1}{4}(1-q)$
KK	$\frac{1}{4}$	→ (KK, ανοίγει K)	$\frac{1}{4}\cdot 1$

δειγματικά σημεία

αθροίζουν στο 1

Για να προχωρήσω χρειάζομαι:

$P($ανοίγει A | AK$) = p$

$P($ανοίγει A | KA$) = q$

Άρα $p_3 = P(\{$KK - ανοίγει K$\}) \mid \{$KK-ανοίγει K, KA ανοίγει K, AK ανοίγει K$\})$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(1-q) + \frac{1}{4}(1-p)} = \frac{1}{3-q-p}$$

πχ Αν τα δυο παιδιά είναι ισοπίθανα να ανοίγουν την πόρτα $(p=q=1/2)$

$$p_3 = \frac{1}{3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

πχ Αν πάντα το πρωτότοκο ανοίγει την πόρτα $(p=1, q=0)$.

$$p_3 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

πχ Αν το κορίτσι ανοίγει με πιθ. $\frac{2}{3}$ όταν υπάρχει 1Α, 1Κ $(p=1/3, q=2/3)$

$$p_3 = \frac{1}{3-} \ldots = \frac{3}{7}$$