16/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 10

Στοχαστική Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

1. Ανεξαρτησία - Πληροφορία

$\mathcal{A}$

$A, B \subseteq \Omega \leftarrow$ δειγμ. χώρος

Διαίσθηση: A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

2. Ορισμός:

- Δυο ενδεχόμενα A, B λέγονται (στοχαστικά) ανεξάρτητα, όταν $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- $\{A_i, i \in I\}$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots P(A_{i_n})$ για κάθε $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in I$

πχ A, B, Γ ανεξάρτητα

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A\Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$

$P(B\Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$

$\Rightarrow P(AB\Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

3. Ορισμός:

$\{A_i, i \in I\}$ ανεξάρτητα ανά δυο $\Leftrightarrow P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ για $i \neq j$, $i, j \in I$

Άρα, ανεξαρτησία $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ ανεξαρτησία ανά δύο

4. Παρατηρήσεις:

1. A, B ανεξ $\Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$$\Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

$$P(B|A) = P(B)$$

2. Ανεξάρτητα $\neq$ Ασυμβίβαστα

Ανεξάρτητα = Η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν μου λέει τίποτα για την πραγματοποίηση του άλλου.

Ασυμβίβαστα = Η γνώση της πραγματοποίησης του ενός, αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου

$(A \cap B = \phi)$

3. Αν A, B ανεξ και ασυμβίβαστα, θα ισχύει:

$P(AB) = P(A) P(B)$ και $P(AB) = 0$

δηλ, $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$.

4. A, B, Γ ανεξάρτητα $\Rightarrow$ $A, B \cup \Gamma$ ανεξ

$A, B\Gamma$ ανεξ

$A, B\Gamma^c$ ανεξ

πχ
$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup \Gamma)) &= P((AB) \cup (A\Gamma)) \\ &= P(AB) + P(A\Gamma) - P(AB\Gamma) \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\Gamma) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \\ &= P(A) \left(P(B) + P(\Gamma) - P(B) \cdot P(\Gamma) \right) \\ &= P(A) \cdot P(B \cup \Gamma) \end{aligned}$$

5. $B\Gamma$ ανεξ δεδομένου του A

$$\Rightarrow P(B\Gamma|A) = P(B|A) \cdot P(\Gamma|A)$$

5. Παράδειγμα:

Συνήθης τράπουλα

4 χρώματα

	A	1	2	3	....	10	J	Q	K
♣									
♢									
♡									
♠									

← 13 αριθμοί

Πείραμα τύχης: Επιλογή τραπουλόχαρτου

Έχουμε τα ενδεχόμενα: A: είναι K

B: είναι ♣

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = P(K♣) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A, B \text{ ανεξάρτητα}$$

Πείραμα τύχης: Επιλογή τραπουλόχαρτου από τράπουλα που έχει αφαιρεθεί ο A ♢.

A: είναι K

B: είναι ♣

$$P(A) = \frac{4}{51}$$

$$P(AB) = P(K♣) = \frac{1}{51} \neq \frac{4}{51} \cdot \frac{13}{51} = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{13}{51}$$

⇒ A, B όχι ανεξάρτητα

$P(A) = \frac{4}{51}$, $P(A|B) = \frac{1}{13} = \frac{4}{52}$ Συνεπώς $P(A) > P(A|B)$

Η ανεξαρτησία είναι μια πολύ λεπτή έννοια.

6. Αντιπαράδειγμα

Ρίψη ζαριού 2 φορές

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), \ldots, (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), \ldots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), \ldots, (6,6) \}$$

A: 1η ρίψη να είναι 3

B: 2η ρίψη να είναι 4

Γ: το άθροισμα των ρίψεων να είναι 7

$$P(\Gamma) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{P(\Gamma A)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}.$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$ Γ, A είναι ανεξάρτητα

$$P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\Gamma) = \frac{1}{36} = P(A)\cdot P(\Gamma) \\ P(B\Gamma) = \frac{1}{36} = P(B)\cdot P(\Gamma) \\ P(AB\Gamma) = \frac{1}{36} \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma) \end{array}\right\}$$ A, B, Γ ανεξάρτητα ανά δυο αλλά όχι ανεξάρτητα.

7. Η δεσμευμένη πιθανότητα σε νέο μέτρο πιθανότητας.

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow[P(B)>0]{B\in\mathcal{A}} (B, \mathcal{A}_B, P_B)$$

$$\mathcal{A}_B = \{AB : A \in \mathcal{A}\} \qquad P_B = P(\ |B)$$

6. Αντιπαράδειγμα

Ρίψη ζαριού 2 φορές

$$\underline{\Omega} = \{ (1,1), (1,2), \dots, (1,6)$$
$$(2,1), (2,2), \dots, (2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1), \dots, (6,6) \}$$

A: $1^{η}$ ρίψη να είναι 3

B: $2^{η}$ ρίψη να είναι 4

Γ: το άθροισμα των ρίψεων να είναι 7

$$P(\Gamma) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Gamma|A) = \frac{P(\Gamma A)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$ Γ, A είναι ανεξάρτητα

$$P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = P(A)\cdot P(B)$$

$$\left.\begin{aligned} P(A\Gamma) &= \frac{1}{36} = P(A)\cdot P(\Gamma) \\ P(B\Gamma) &= \frac{1}{36} = P(B)\cdot P(\Gamma) \\ P(AB\Gamma) &= \frac{1}{36} \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma) \end{aligned}\right\}$$

A, B, Γ ανεξάρτητα ανά δυο αλλά <u>όχι</u> ανεξάρτητα.

7. Η δεσμευμένη πιθανότητα σε νέο μέτρο πιθανότητας.

$$(\underline{\Omega}, \mathcal{A}, P) \xrightarrow[P(B)>0]{B=A} (B, \mathcal{A}_B, P_B)$$

$$\mathcal{A}_B = \{AB : A \in \mathcal{A}\}, \quad P_B = P(\ |B)$$

$0 \leq P(A|B) \leq 1$

$P(\Omega|B) = 1$

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

↑

ασυμβίβαστα

και όλες οι άλλες ιδιότητες

πχ $A \subseteq \Gamma \Rightarrow P(A|B) \leq P(\Gamma|B)$

$P(A \cup B \cup \Gamma|\Delta) = P(A|\Delta) + P(B|\Delta) + P(\Gamma|\Delta) - P(AB|\Delta) - P(A\Gamma|\Delta) - P(B\Gamma|\Delta) + P(AB\Gamma|\Delta)$

8. Λόγος πιθανοφάνειας (odds) ενδεχομένων

Λόγος πιθανοφάνειας (odds) του A $= \dfrac{P(A)}{P(A^c)}$

9. Αναθεώρηση των odds δοθείσης πληροφορίας

αρχικά odds του A $= \dfrac{P(A)}{P(A^c)}$ odds του A υπό την πληροφορία E $= \dfrac{P(A|E)}{P(A^c|E)}$

Σύνδεση:

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} \underset{\text{Bayes}}{=} \frac{\frac{P(A)}{P(E)} \cdot P(E|A)}{\frac{P(A^c)}{P(E)} \cdot P(E|A^c)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$$

10. Παράδειγμα:

Ένα συρτάρι με δυο νομίσματα, εκ των οποίων το ένα είναι κάλπικο. Το κανονικό φέρνει κορώνα. Το κανονικό φέρνει κορώνα-γράμματα με πιθανότητα 1/2. Το κάλπικο φέρνει κορώνα με πιθ. 3/4 και γράμμ. με πιθ. 1/4.

Συνοψίζοντας:

κανονικό < Κ με πιθ 1/2, Γ με πιθ 1/2 , κάλπικο < Κ με πιθ 3/4, Γ με πιθ 1/4

Πείραμα τύχης: Επιλέγω νόμισμα και το ρίχνω

A: επιλογή του κάλπικου.

Αρχικά, odds του A $= \dfrac{P(A)}{P(A^c)} = \dfrac{1/2}{1/2} = 1$

Ρίχνω νόμισμα 3 φορές και έρχεται ΚΚΚ = E

$$\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)} = \frac{P(A)}{P(A^c)} \cdot \frac{P(E|A)}{P(E|A^c)} = 1 \; \frac{(3/4)^3}{(1/2)^3} = \frac{27}{4}$$

$$\left\{ \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{27/16\cdot 2\cdot 2}{1/2\cdot 2\cdot 2} = \frac{27}{8} \right\}$$

11. Άσκηση

Έχουμε 3 κάρτες

Κ	Κ	Π
Κ	Π	Π

Κ: κόκκινη

Π: πράσινη

Πείραμα τύχης: Επιλογή κάρτας (ισοπίθανα)

Εμφάνιση πλευράς (ισοπίθανα)

P(άλλη πλευρά κόκκινη | κόκκινη πλευρά) = ;

$1/3$ ΚΚ $\xrightarrow{1}$ (ΚΚΚ) $= \frac{1}{3}$

$1/3$ ΚΠ $\xrightarrow{1/2}$ (ΚΠ, Κ) $= 1/6$

$\xrightarrow{1/2}$ (ΚΠ, Π) $= 1/6$

$1/3$ ΠΠ $\xrightarrow{1}$ (ΠΠΠ) $1/3$

↑ ↑

1° στάδιο (επιλογή κάρτας) 2° στάδιο (επιλογή πλευράς)

$$P(\text{άλλη πλευρά κόκκινη} \mid \text{κόκκινη πλευρά}) = \frac{P(\{ΚΚ, Κ\})}{P(\{(ΚΚ,Κ),(ΚΠ,Κ)\})} =$$

$$= \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Λάθος:

P(άλλη πλευρά κόκκινη | πλευρά κόκκινη) = P({ΚΚ} / {ΚΚ, ΚΠ})

↑

<u>λάθος</u>

18/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 11

Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

με την ιδιότητα $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}$

για κάθε $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα λέγεται τυχαία μεταβλητή.

Διαισθητικά, τ.μ. = αριθμητικό χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης.

2. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Ρίψη νομίσματος 3 φορές.

$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

$\downarrow$ 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 0

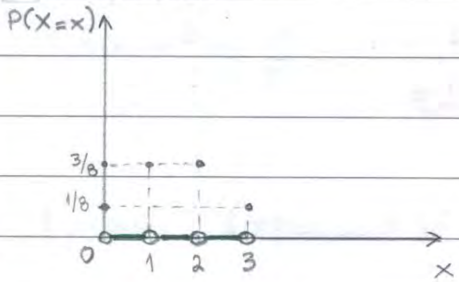
$\mathbb{R} = \# K$

$P(X=2) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$= P(X^{-1}(\{2\}))$

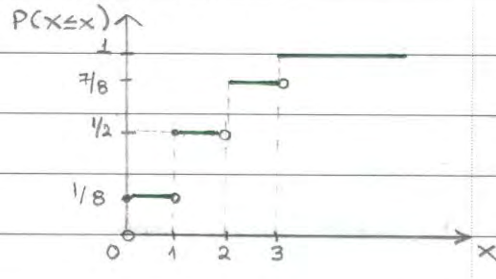
$P(X \in (0.5, 2.5)) = P(X^{-1}((0.5, 2.5)) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}) = \frac{6}{8}$

$P(X = x)$



Συνάρτηση πιθ. της X

$P(X \leq x)$



Συνάρτηση κατανομής της X

★ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ:

$A = \phi \rightarrow$ αδύνατο

$P(A) = 0 \rightarrow$ απίθανο

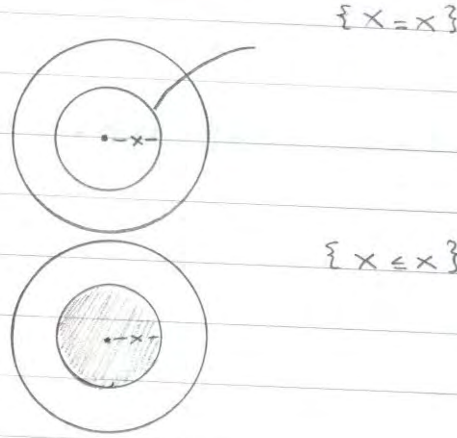
δηλ, $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \phi$

$P(A) = 1 \not\Rightarrow A = \Omega$

3. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης: Επιλογή σημείου ομοιόμορφα στο μοναδιαίο δίσκο.

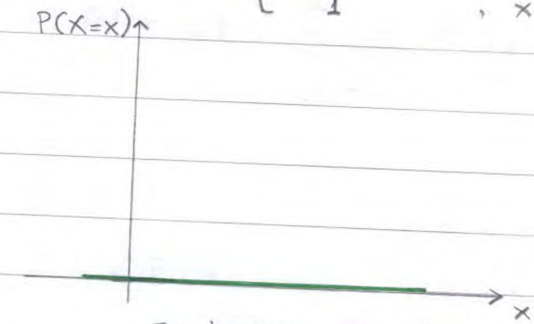
X = απόσταση από το κέντρο



εμβαδόν του χωρίου {X=x}

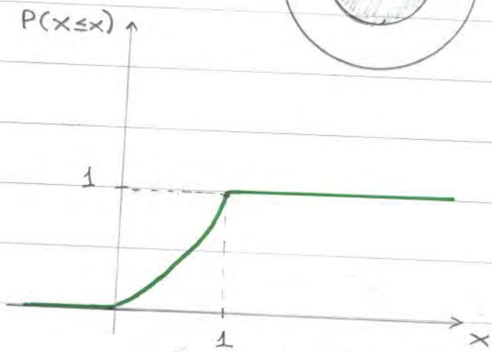
$$P(X=x) = \frac{0}{\pi} = 0 \ ★$$

$$P(X \le x) = \begin{cases} \pi x^2/\pi = x^2 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \le 0 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$



Συνάρτηση πιθανότητας

μη πληροφοριακή



Συνάρτηση κατανομής

πληροφοριακή

4. Παράδειγμα:

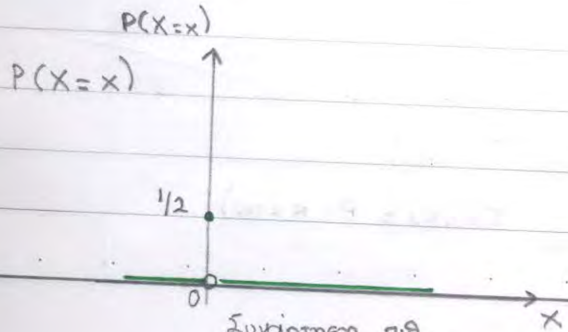
Πείραμα τύχης: Ρίψη δίκαιου νομίσματος $<$ Κ 1/2, Γ 1/2

Αν φέρω Κ → κέρδος 0

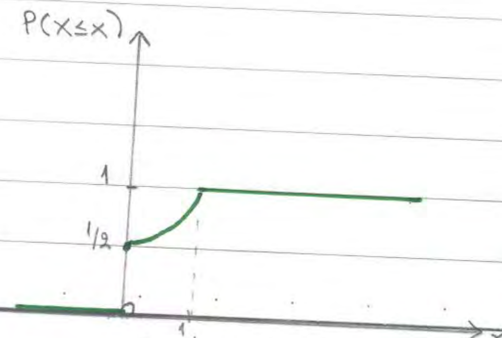
Αν φέρω Γ → επιλογή σημείου σε μοναδιαίο δίσκο

και κέρδος = απόσταση σημείου απ' το κέντρο.

X = κέρδος



Συνάρτηση πιθ.



Συνάρτηση κατ.

• $P(X=x)=0 \quad , x<0$ — χρησιμοποιώ θ.ο.π.

$$P(X=0) = \underset{1/2}{P(K)}\, \underset{1}{P(X=0|K)} + \underset{1/2}{P(\Gamma)} \cdot \underset{0}{P(X=0|\Gamma)} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$\underset{x>0}{P(X=x)} = \underset{1/2}{P(K)}\, \underset{0}{P(X=K|K)} + \underset{1/2}{P(\Gamma)} \cdot \underset{0}{P(X=K|\Gamma)} = 0$$

• $x<0 \quad , \quad P(X\le x)=0$

$x=0 \quad , \quad P(X\le 0) = \frac{1}{2}$

$x>0 \quad , \quad P(X\le x) = \underset{1/2}{P(K)} \cdot \underset{1}{P(X\le x|K)} + \underset{1/2}{P(\Gamma)} \cdot \underset{\min\{x^2,1\}}{P(X\le x|\Gamma)}$

άρα

$$P(X\le x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{2} & , 0<x<1 \\ 1 & , x\ge 1 \end{cases}$$

5. Συνάρτηση Κατανομής

(Ω, A, P) χώρος πιθ. $\quad \rightarrow F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ (παίρνει αριθμούς και τους κάνει πιθανότητα)

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τ.μ. $\quad F_X(x) = P(X\le x) = P(\{\omega : X(\omega) = x\})$

$F_X(x)$: συνάρτηση κατανομής της X

6. Ιδιότητες συνάρτησης κατανομής

1. $F_X(x)$ αύξουσα
2. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
3. $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$
4. $F_X(x)$ δεξιά συνεχής, δηλ. $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
5. $F_X(x)$ έχει αριστερά όρια, δηλ. $\exists \lim_{x\to x_0^-} F_X(x) = P(X<x)$

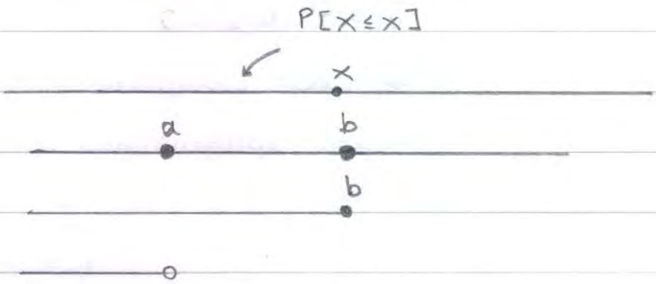
6. $P(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

7. $P(a\leq X\leq b) = F_X(b) - F_X(a-)$ ← το αριστερό όριο

8. $P(a\leq X<b) = F_X(b-) - F_X(a-)$

9. $P(a<X<b) = F_X(b-) - F_X(a)$

(βοηθάει το σχήμα →)



10. $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x-)$

Απόδειξη:

1. $x\leq y \Rightarrow (-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$

$\Rightarrow P(X\in(-\infty,x]) \leq P(X\in(-\infty,y])$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$.

2. Παίρνω ακολουθία $x_n\to\infty$, $x_n \uparrow$

τότε $(-\infty, x_n]$ αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων

και $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n] = \mathbb{R}$

Εδώ χρησιμοποιώ ότι αν $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\ldots$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Άρα, έχω:

$$F_X(x_n) = \lim_{x\to\infty} P(X\leq x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X^{-1}(-\infty, x_n])$$

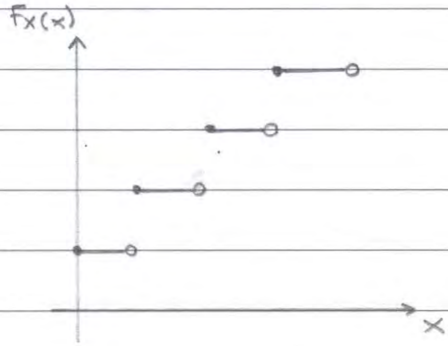
$$= P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n]\right)\right)$$

$$= P(X^{-1}(\mathbb{R})) = 1$$

κλπ.

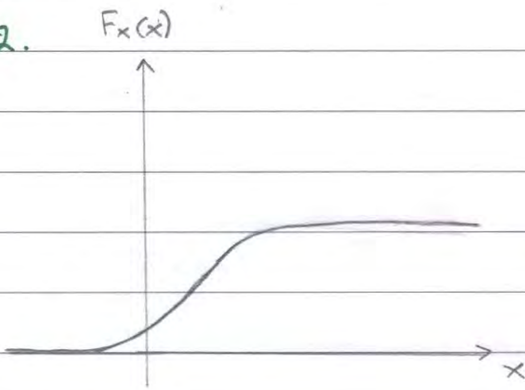
7. Τυπικές μορφές συνάρτησης κατανομής

1.



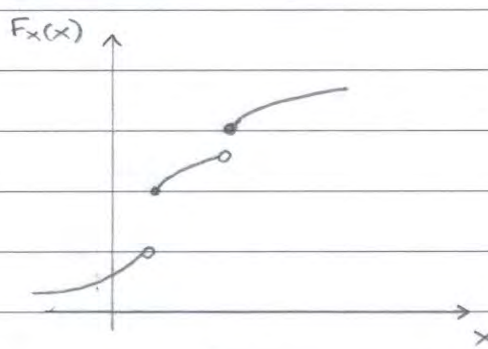
Κλιμακωτή, (κατά τμήματα σταθερή και αύξουσα)
αύξουσα,
δεξιά συνεχής
⇒ X → διακριτή
παίρνει αριθμήσιμες το πολύ τιμές

2.



$F_X(x)$ συνεχής
X → συνεχής
$F_X(x)$ παραγωγίσιμη (εκτός από πεπερ. πλήθος σημείων).
X → απόλυτα συνεχής

3.



$F_X(x)$ έχει ασυνέχειες αλλά δεν είναι κλιμακωτή
X → μεικτή

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

X τ.μ. διακριτή $\Rightarrow$ αν $\exists\, x_0, x_1, x_2, \ldots$ $P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}) = 1$

2. Συνάρτηση Πιθανότητας / Συνάρτηση Κατανομής

X διακριτή τ.μ.

$f_X(x) = P(X = x)$, συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)

Αν η X παίρνει τιμές στο $\{x_0, x_1, \ldots\}$ δίνουμε $f_X(x)$, $x = x_0, x_1, \ldots$

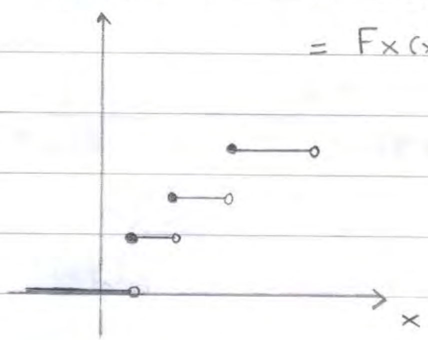
$F_X(x) = P(X \leq x)$ συνάρτηση κατανομής (σ.κ.)

$F_X(x) \rightarrow f_X(x) = P(X = x)$

$f_X(x)$

$= P(X \leq x) - P(X < x)$

$= F_X(x) - F_X(x-)$ — $\lim\limits_{y \to x^-} F_X(y)$



Τυπική μορφή
σ.κ. διακριτής τ.μ.

$f_X(x) \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = \sum\limits_{y \leq x} P(X = y) = \sum\limits_{y \leq x} f_X(y)$

3. Ιδιότητες της σ.π.

1. $f_X(x) \geq 0$
2. $\sum\limits_{x} f_X(x) = 1$

★ χρησιμοποιώ αυτό → $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot \lambda^n = a_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}$, $|\lambda|<1$

4. Παράδειγμα

X τ.μ.

$f_X(x) = c\left(\frac{1}{3}\right)^x \quad , x=0,1,2,\ldots$

(i) $c=;$

(ii) $P(X \geq 5) =;$

(iii) $P(3 \leq X \leq 8 \mid X \geq 5) =;$

Λύση: (i) $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} c\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot \frac{1}{1-1/3} = 1 \Rightarrow c = 2/3$ άρα, $f_X(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x=0,1,\ldots$

(ii) $P(X \geq 5) = \sum_{x \geq 5} P(X=x) = \sum_{x\geq 5} f_X(x) = \sum_{x=5}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x =$

$\overset{*}{=} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$

(iii) $P(3 \leq X \leq 8 \mid X \geq 5) = \frac{P(3\leq X \leq 8,\ X\geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(5 \leq X \leq 8)}{P(X\geq 5)}$

$= \frac{\sum_{x=5}^{8}(2/3)(1/3)^x}{(1/3)^5} = \frac{2/3\cdot(1/3)^5\left(1+1/3+(1/3)^2+(1/3)^3\right)}{(1/3)^5}$

$= \frac{1-(1/3)^4}{1-1/3}\cdot 2/3 = 1-(1/3)^4$

5. Η έννοια της μέσης τιμής μιας διακριτής τ.μ.

1η ιδέα: Κλασική Πιθανότητα

Πεπερ. πλήθος μεγέθους N

X = αριθμ. χαρακτηριστικό του πληθ.

Μέση Τιμή (expectation)

$$E[x] = \frac{\text{άθροισμα των τιμών του χαρακτηριστικού για όλα τα άτομα}}{\text{πλήθος των ατόμων}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$, x_i = η τιμή του χαρακτ. του i ατόμου

$$= \frac{\sum_i N_i \cdot i}{N}$$, N_i = # ατόμων με τιμή χαρακτ. i.

$$= \sum_i i \frac{N_i}{N}$$

$\frac{N_i}{N}$ = Το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού με τιμή χαρακτ. i $= P(X=i)$ στο πλαίσιο της κλασικής πιθαν.

$$= \sum_i i f_X(i)$$

άρα, $E[x] = \sum_x x f_X(x)$

$2^η$ ιδέα: Κέντρο βάρους

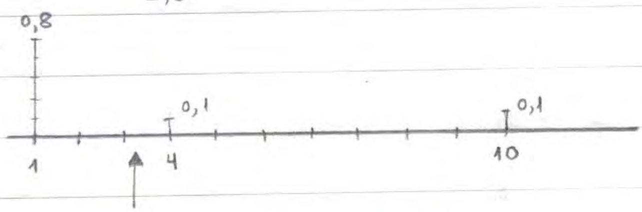
Εστω X τ.μ διακριτή με τιμές 1, 4, 10

$P(X=1) = 0{,}8$

$P(X=4) = 0{,}1$

$P(X=10) = 0{,}1$ (+)

$1{,}0$



$E[x]$ = "κέντρο βάρους"

$\parallel$

μ

$E[x] = \mu$ πρέπει να χαρακτηρίζεται Συνολική ροπή = 0 ως προς το μ

$$\sum_x (x-\mu) \cdot P(X=x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_x (x-\mu) f_X(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_x x f_X(x) - \mu \underbrace{\sum_x f_X(x)}_{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \sum_x x f_X(x)$$

$3^η$ ιδέα: Επαναλαμβανόμενα πειράματα.

Έστω ένα επαναλ. πείραμα τύχης και $x_0, x_1, x_2, \ldots$ οι δυνατές τιμές ενός αριθμ. χαρακτηριστικού της, έστω X.

$$\underset{\text{του χαρακτηριστικού}}{\text{Μέση τιμή}} = \sum_{\substack{x \\ \uparrow \\ \text{τιμή} \\ \text{χαρακτ.}}} x \cdot \underbrace{\left(\begin{matrix}\text{σχετική} \\ \text{συχνότητα } x\end{matrix}\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{ερμηνεία της πιθ. ως} \\ \text{οριακή σχετ. συχνότητα } = P(X=x)}} = \sum_x x \cdot f_X(x)$$

6. Ορισμός

X διακριτή τμ με σ.π. $f_X(x)$

Ορίζουμε τη μέση τιμή της X, $E[X] = \sum_x x f_X(x)$,

υπό την προϋπόθεση ότι $\sum_x |x| f_X(x) < \infty$

7. Δείκτρια τ.μ.

Πείραμα τύχης $\rightarrow$ Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

και $A \in \mathcal{A}$

Ορίζουμε: $I_A = 1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Ισχύει ότι: $P(A) = E[1_A]$.

Πράγματι, $E[1_A] = \sum_x x \cdot P(1_A = x)$

$$= 0 \cdot \underbrace{P(1_A = 0)}_{0} + 1 \cdot \underbrace{P(1_A = 1)}_{P(A)}$$

$$= P(A)$$

8. Παράδειγμα

Παιχνίδι δύο ερωτήσεων

Γεωγρ	40%	→	100 €
Ιστορίας	60%	→	80 €
1 παίκτης	↑		↑
	πιθ. σωστής απάντησης		κέρδος σωστής απάντησης

Αν η πρώτη απάντηση σωστή, συνεχίζει στη δεύτερη.
Αλλιώς, τίποτα.
Να απαντήσει πρώτα Γεωγρ ή Ιστορία;

$X =$ κέρδος

Πείραμα τύχης: Πρώτα Γ.

$E[X] = ;$

x	0	100	180
$P(X=x)$	0,6	$0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$	$0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

άρα $E[X] = 0 \cdot \cancel{0{,}6} + 100 \cdot 0{,}16 + 180 \cdot 0{,}24 \simeq 60$ €

Πείραμα τύχης: Πρώτα Ι

$E[X] = ;$

x	0	80	180
$P(X=x)$	0,4	$0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$	$0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}24$

άρα $E[X] = 0 \cdot \cancel{0{,}4} + 80 \cdot 0{,}36 + 180 \cdot 0{,}24 \simeq 75$ €

Άρα, συμφέρει πρώτα Ιστορία.

25/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 13

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές
Μέση Τιμή - Διασπορά

1. Μέση τιμή τ.μ.

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $f_X(x) = P(X=x)$

$E[X] = \sum_x x f_X(x)$ ← μέτρο θέσης της X (μας δίνει πληροφορία, δηλ. γύρω από το πού κινούνται τα x)

2. Παράδειγμα.

X = εισόδημα πολίτη χώρας Α

Y = » » Β.

$P(X=1) = \frac{999}{1000}$	$P(Y=900) = \frac{1}{2}$
$P(X=1000001) = \frac{1}{1000}$	$P(Y=1000) = \frac{1}{2}$
$E[X] = 1 \cdot \frac{999}{1000} + 1.000.001 \cdot \frac{1}{1.000} = 1001$	$E[X] = 900 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \frac{1}{2} = 950$

Έχουμε, λοιπόν, $E[X] > E[Y]$.

Παρ' όλα αυτά προτιμάμε να είμαστε πολίτες της Β.

(γιατί υπάρχει μεγάλη ανισοκατανομή του εισοδήματος)

Λόγος: Μεγάλη διακύμανση της X

3. Ορισμός

X διακριτή τ.μ. σε σ.π. $f_X(x) = P(X=x)$

ορίζουμε διασπορά της X:

$\mathrm{Var}[X] = E[(X-E[X])^2]$ ← μέτρο διακύμανσης ή μεταβλητότητας της X.

Ορίζουμε τυπική απόκλιση της X:

$\sigma_X = \underbrace{SD}_{\text{standard deviation}}(X) = \sqrt{Var[X]}$ (την χρησιμοποιούμε γιατί έχει ίδιες μονάδες με την X)

Τα $Var[X]$, σ_X ορίζονται αν $\sum_x x^2 f_X(x) < \infty$

4. Παράδειγμα

X: $f_X(x) =$

x	-1	0	1
$f_X(x)$	1/4	1/2	1/4

Y: $f_Y(x) =$

y	-1	0	1
$f_Y(y)$	1/8	3/4	1/8

Z: $f_Z(x)$

x	-2	0	2
$f_Z(x)$	1/4	1/2	1/4

Εδώ, $E[X] = (-1)\frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$

$E[Y] = 0$

$E[Z] = 0$

Επίσης, έχουμε:

αθροίζω $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ γιατί λόγω τετραγώνου μας κάνει και το -1 και το 1

$Var[X] = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] = 0 \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$Var[Y] = E[(Y-E[Y])^2] = E[Y^2] = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$Var[Z] = E[(Z-E[Z])^2] = E[Z^2] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Άρα, $\underbrace{Var[Z] > Var[X]}_{\text{ύπαρξη πιο διεσπαρμένων τιμών}} > \overbrace{Var[Y]}^{\text{απόδοση μεγαλύτερης πιθανότητας στις κεντρικές τιμές.}}$

5. Συναρτήσεις τ.μ.

$X \overset{:\Omega \to \mathbb{R}}{}$ διακριτή τ.μ. με σ.π. $f_X(x) = P(X=x)$, $x \in S$ ← σύνολο τιμών της X

$\left(\sum_{x \in S} f_X(x) = 1 \right)$

και

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση

Τότε,

η $\underset{\overset{\shortparallel}{Y}}{g(X)}$ είναι επίσης τ.μ.

Ερωτήματα:

$f_Y(y) = ;$ σ.π.

$E[Y] = ;$

$Var[Y] = ;$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = P(g(X)=y) = \sum_{x:\, g(x)=y} P(X=x) =$$

$$= \sum_{x:\, g(x)=y} f_X(x).$$

6. Παράδειγμα

X

x	2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	1/16	1/8	1/4	3/16	1/8	1/4

$Y = X^2$ ← είναι τ.μ.

Y	0	1	4	9
$f_Y(y)$	1/4	5/16	3/16	1/4

$$E[Y] = \cancel{0 \cdot \frac{1}{4}} + 1 \cdot 5/16 + 4 \cdot 3/16 + 9 \cdot 1/4 = \frac{53}{16}$$

$$Var[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = \left(0 - \frac{53}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{53}{16}\right)^2 \cdot \frac{5}{16} + \left(4 - \frac{53}{16}\right)^2 \cdot \frac{3}{16}$$

$$+ \left(9 - \frac{53}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \ldots$$

7. Θεώρημα (τύπος αφηρημένου στατιστικού)

- X τ.μ. διακριτή με σ.π. $f_X(x) = P(X=x)$, $x \in S$

  Τότε, $E[g(x)] = \sum_{x} g(x) f_X(x)$, $x \in S$

- Ο κλασικός υπολογισμός της $E[g(x)]$ γίνεται σε 2 βήματα:

  $Y = g(x) \quad f_X(x) \rightarrow f_Y(y) \rightarrow E[g(x)] = E[Y] = \sum_{Y} y\, f_Y(y)$

$$f_Y(y) = \sum_{x:g(x)=y} f_X(x)$$

Απόδειξη: Εστω $Y = g(x)$

$$E[g(x)] = E[Y] - \sum_{Y} y \cdot f_Y(y)$$

$$= \sum_{Y} y \sum_{x:g(x)=y} f_X(x)$$

$$= \sum_{Y} \sum_{x:g(x)=y} y \cdot f_X(x).$$

$$= \underbrace{\boxed{\sum_{Y} \sum_{x:g(x)=y}}}_{\sum_{x \in S}} g(x) \cdot f_X(x)$$

$$= \sum_{x \in S} g(x) \cdot f_X(x).$$

8. Παράδειγμα (συνέχεια)

X τ.μ.

X	-2	-1	0	1	2	3
$f_X(x)$	1/16	1/8	1/4	3/16	1/8	1/4

$Y = X^2 = g(x)$

$$E[X^2] = (-2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{53}{16}$$

9. Ιδιότητες $E[x]$, $Var[x]$, σ_x.

1. $E[ax+b] = aE[x]+b$
2. $Var[ax+b] = a^2 Var[x]$
3. $\sigma_{ax+b} = |a|\cdot\sigma_x$
4. $Var[x] = E[x^2]-(E[x])^2$
5. $\cancel{E[g(x)] = g(E[x])}$

ισχύει μόνο αν g γραμμική

Αποδείξεις:

Έστω X διακριτή τ.μ. με σ.π. $f_x(x)$, $x\in S$

1. $E[ax+b] \underset{\substack{\uparrow\\ \text{τύπος αφηρημένου στατιστικού}}}{=} \sum_{x\in S}(ax+b)f_x(x) = a\sum_{x\in S} x f_x(x) + b\underbrace{\sum_{x\in S} f_x(x)}_{1}$

$= a\cdot E[x]+b$

2. $Var[ax+b] \overset{\text{ορισμός } Var[\,]}{=} E[(ax+b-E[ax+b])^2]$

$\overset{1.}{=} E[((ax+\cancel{b}) - aE[x]-\cancel{b})^2]$

$= E[a^2(x-E[x])^2]$

$\overset{1.}{=} a^2 E[(x-E[x])^2]$

$\overset{\text{ορισμός } Var[\cdot]}{=} a^2\, Var[x].$

3. $\sigma_{ax+b} = \sqrt{Var[ax+b]} \overset{2.}{=} \sqrt{a^2 Var[x]} = |a|\cdot\sqrt{Var[x]} = |a|\cdot\sigma_x$

4. $Var[x] = E[(X-E[x])^2] = E[x^2 - 2E[x]\cdot x + (E[x]^2)]$

$= E[x^2] - 2E[x]^2 + E[\cancel{x}]^2$

5. Γενικά, $E[g(x)] \neq g(E[x])$ εκτός αν g γραμμική (βλ. 1.)

π.χ.

x	0	1
$f_x(x)$	1/4	3/4

$(E[x])^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$E[x^2] = 3/4$

27/10/2017 ΜΑΘΗΜΑ 15

Ειδικές διακριτές κατανομές

1. Υπενθυμίσεις

X τ.μ. με σ.π. $f_X(x) = P(X = x)$

$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f_X(y)$

μέτρο θέσης → $E[X] = \sum_x x f_X(x) < \infty$

μέτρο διακύμανσης → $Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

$E[g(x)] = \sum_x g(x) f_X(x)$

$E[aX+\beta] = a \cdot E[X] + \beta$

$Var[aX+\beta] = a^2 Var[X]$

$\sigma_{aX+\beta} = |a| \cdot \sigma_X$

2. Κλασικά διακριτά μοντέλα

I. Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

Επαναλαμβανόμενα πειράματα τύχης με 2 αποτελέσματα: Επιτυχία, Αποτυχία

→ κατανομές Bernoulli, Διωνυμική, Γεωμετρική, Αρνητ. Διων., Poisson.

II. Τυχαία επιλογή n σφαιριδίων από κάλπη με m λευκά και $N-m$ Μαύρα σφαιρίδια χωρίς επαν.

→ Υπεργεωμετρική κατανομή.

III. Τυχαία επιλογή αριθμού στο $\{1, 2, \ldots, n\}$

→ Διακριτή ομοιόμορφη κατανομή.

3. Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

$X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες ισόνομες // με ίδια κατανομή

$P(X_n = k) = \begin{cases} p, & k=1 \text{ (επιτυχία)} \\ 1-p, & k=0 \text{ (αποτυχία)} \end{cases}$

$p \in (0,1)$

Η X_n = δίτιμη τ.μ. ή δοκιμή Bernoulli

πχ μια πραγματοποίηση μπορεί να είναι η εξής:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
0	0	1	0	1	1	1	0	0

Μας ενδιαφέρει:

S_n = # επιτυχιών στις n πρώτες δοκιμές, $n \geq 1$

T_n = # δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία.

πχ. $S_9 = 4$, $S_3 = 1$

$T_1 = 3$, $T_4 = 7$ κλπ

$S_1 \to$ κατανομή Bernoulli (p)

$S_n \to$ διωνυμική κατανομή Bin (n, p)

$T_1 \to$ γεωμετρική κατανομή Geom (p)

$T_n \to$ αρνητ. διωνυμική κατανομή NegBin (n, p)

S_n για n μεγάλο και p μικρό $\to$ Poisson.
προσεγγίζεται

4. Κατανομή Bernoulli

$X \in \{0, 1\}$

σ.π. $f_X(1) = p$

$f_X(0) = 1-p$

$E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = \underbrace{E[X^2]}_{= 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p} - \underbrace{(E[X])^2}_{= p^2} = p(1-p)$

5. Γεωμετρική κατανομή

$X = \#$ δοκιμών ως την 1^{η} επιτυχία (T_1)

$\in \{1, 2, 3, \dots\}$ ← άπειρο πλήθος τιμών ↙ k-1 αποτυχίες με 1-p η καθεμία

$$f_X(k) = P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot \underbrace{p}_{\text{επιτυχία}}, \quad k \geq 1$$

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0 \dots 0}_{k-1 \text{ αποτυχίες}}\ \underset{k\text{-οστή}}{\underset{\uparrow}{1}}$$

μπορούμε να το σκεφτόμαστε σαν σχέση περιόδου-συχνότητας.

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p \overset{\star}{=} p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

★ Γεωμετρική σειρά (Άπειρο άθροισμα γεωμετρ. προόδου)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1$$

$$\xRightarrow{dt} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot t^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2} \xRightarrow{t=1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} \cdot p =$$

Παίρνω ξανά τον τύπο της γεωμετρ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t} \xRightarrow{d/dt} \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\,t^{k-1}}^{=\frac{1}{1-t}} \xRightarrow{\cdot t} \sum_{k=1}^{\infty} k\,t^k = \frac{t}{(1-t)^2} \xRightarrow{d/dt}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k^2 t^{k-1} = \frac{1(1-t)^2 + t\,2(1-t)}{(1-t)^4} = \frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{(1-t)^4} = \frac{1-t^2}{(1-t)^4}$$

$$\xRightarrow{t=1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = \frac{1-(1-p)^2}{p^4}$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \frac{2p-p^2}{p^3}$$

άρα, $Var[X] = \dfrac{2-p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

6. Διωνυμική κατανομή

$X = \#$ επιτυχιών ως την n-οστή δοκιμή (S_n)

$\in \{0, 1, \ldots, n\} \leftarrow$ πεπερασμένο πλήθος τιμών

$f_X(k) = P(X = k) = P(k$ επιτυχίες σε n δοκιμές$)$

αποτέλεσμα πειράματος τύχης n δοκιμών $\quad \underbrace{(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \ldots, 1)}_{n \text{ θέσεις}}$

αποτέλεσμα με k επιτυχίες και $n-k$ αποτυχίες $\xrightarrow{\text{πιθ}} p^k (1-p)^{n-k}$

πχ $n = 5$, $k = 2$ (2 επιτυχίες σε 5 δοκιμές)

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,0,0,0) \to p^2(1-p)^3 \\ (1,0,1,0,0) \to \text{»} \\ (1,0,0,1,0) \to \text{»} \\ (0,1,0,0,1) \to \text{»} \\ (1,0,0,0,1) \to \text{»} \\ \vdots \end{array}\right\}$$ ευνοϊκά αποτελέσματα για $k=2$ επιτυχίες

Συνολική πιθαν για k επιτυχίες $= \underbrace{\#\text{ αποτ. με } k \text{ επιτυχίες}}_{\frac{(k+n-k)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}} \times p^k (1-p)^{k-1}$

Τελικά,

$$f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \le k \le n$$

Άθροισμα κλειδί για τους υπολογισμούς εδώ: $\quad (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$ ή ∞

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \, {}^{*}$$

$$= (1-p)^n \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

* Υπάρχει από πίσω το άθροισμα:

$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k \leftarrow$ αυτό πρέπει να βρω.

Έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n \xrightarrow{d/dt} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{n}{k} t^{k-1} = n(1+t)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\cdot t} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k = n \cdot t (1+t)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{t = p/1-p} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = n \cdot \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow E[x] = (1-\cancel{p})^n \frac{np}{(1-\cancel{p})^n}$$

$$\Rightarrow E[x] = n \cdot p$$

Η διασπορά, όμοια:

$$Var[x] = n \cdot p (1-p)$$

Εναλλακτικός τρόπος υπολ. αθροίσματος:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$E[x] = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = (1-p)^n \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \frac{n}{\cancel{k}} \binom{n-1}{\underbrace{k-1}_{j}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

$$= \frac{p \cdot n (1-p)^n}{1-p} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{p}{1-p}\right)^j$$

← το $j+1$ το έκανα j και έβγαλα το $p/1-p$ μπροστά

$$= \frac{n(1-\cancel{p})^n \cdot p}{1-\cancel{p}} \left(\cancel{1 + \frac{p}{1-p}}\right)^{n-1} = n \cdot p$$

30-10-2017

Ειδικές Διακριτές Κατανομές II

1. Μοντέλο ανεξάρτητων δοκιμών

Bernoulli

Δοκιμές με ανεξ. ισόνομα αποτελέσματα

x_1, x_2, x_3

$x_n = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ. } p \\ 0, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$

$S_n = \#$ επιτυχιών σε n δοκιμές

$T_n = \#$ δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία

$S_1 \sim Bernoulli(p)$ $\quad P(S_1 = k) = \binom{1}{k} p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1, \ldots$

$E[S_1] = p$

$Var[S_1] = p(1-p)$

$T_1 \sim Geom(p)$ $\quad P(T_1 = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \ldots$

$E[T_1] = 1/p$

$Var[T_1] = \dfrac{1-p}{p^2}$

$S_n \sim Bin(n, p)$ $\quad P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots$

$E[S_n] = n \cdot p$

$Var[S_n] = np(1-p)$

2. Η αρνητική διωνυμική

$X = T_n = \#$ δοκιμών ως την n-οστή επιτυχία

$\sim NegBin(n, p)$

Η n-οστή επιτυχία στην k-οστή δοκιμή $(X = k)$ $\rightarrow$ τυπικό αποτέλεσμα

$$\underbrace{\underbrace{1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \ldots 0}_{\substack{n-1 \text{ "1"} \\ k-n \text{ "0"}}}}_{\text{συνολικά } k-1 \text{ δοκιμές}}\,1$$

πιθ. τέτοιου αποτελέσματος

$p^{n-1} (1-p)^{k-n} \cdot p$

$= p^n (1-p)^{k-n}$

αποτελεσμάτων
με $n-1$ "1"
$k-n$ "0"

και "1" στο τέλος

$$= \binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}$$

άρα,

$$T_n \sim \text{Neg Bin}(n, p) \qquad P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \dots$$

στην καλύτερη περίπτωση, θα έχω n επιτυχίες σε k δοκιμές, άρα ξεκινάω από n.

$$E[T_n] = \frac{n}{p}$$

$$Var[T_n] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

* Άθροισμα-κλειδί για την Αρν. Διωνυμική:

(δεν τα προπήραμε)

Αρν. Διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\longrightarrow (1+t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-n}{k}}_{= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\dots(-n-(k-1))}{k!}} t^k \quad , |t| < 1$$

φυσικός

$$\Rightarrow (1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

ή εναλλακτικά,

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k}_{} = ;$$

άνω διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\left(\sum_{k=0}^{\cancel{n}\ \cancel{n}\ \infty} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n \right)$$

Υπολογίζεται από διαδοχικές παραγωγίσεις της γεωμ. σειράς.

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = (1-t)^{-1} \xrightarrow{d/dt} \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1} = (1-t)^{-2}$$

γιατί έφαγα τον σταθ. όρο

$$\xrightarrow{d/dt} \sum_{k=2}^{\infty} k(1-t)\, t^{k-2} = 2(1-t)^{-3}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-(n-1))\, t^{k-n} = n!\,(1-t)^{-(n+1)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k+n-1)}{n!}\, t^{k-n} = (1-t)^{-(n+1)}$$

$$\xrightarrow{\times t^n} \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^{k} = \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}}$$

<u>Υπολογισμός μέσης τιμής:</u>

$$E[X] = \sum_{k=n}^{\infty} k\cdot P(X=k) = \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$= \frac{p^n}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k-1}{n-1} (1-p)^k$$

Υπενθύμιση:

$$\binom{k}{n} = \frac{k}{n}\binom{k-1}{n-1}$$

$$= \frac{n\cdot p^n}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{k-1}{n-1} (1-p)^k$$

$$= \frac{n\cdot p^n}{(1-p)^n} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} (1-p)^k$$

$$= \frac{n\cdot p^n}{(1-\cancel{p})^n} \frac{(1-\cancel{p})^n}{(1-(1-p))^{n+1}} = \frac{n}{p}$$

<u>Υπολογισμός Διασποράς:</u>

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= E[X^2] - n^2/p^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=n}^{\infty} k^2 \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

$$= \frac{n\cdot p^n}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{k-1}{n-1} (1-p)^k$$

$$= \frac{n p^n}{(1-p)^n} \sum_{k=n}^{\infty} k \binom{k}{n} (1-p)^k$$

Παραγωγίζω το άνω διων. ανάπτυγμα:

$$\sum_{k=n}^{\infty} k \binom{n}{k} t^{k-1} = \frac{n t^{n-1} (1-t)^{n+1} + t^n (n+1) \cancel{(1-t)^n}}{(1-t)^{2n+2}}$$

$$= \frac{t^{n-1} (n - \cancel{nt} + \cancel{tn} + t)}{(1-t)^{n+2}}$$

$$= \frac{t^{n-1}(n+t)}{(1-t)^{n+2}}$$

Άρα,

$$E[X^2] = \frac{n \cdot \cancel{p^n}}{(1-p)^n} \cdot \frac{(1-\cancel{p})^n (n+1-p)}{p^{n+2}}$$

$$= \frac{n(n+1-p)}{p^2}$$

Τελικά,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

3. Άλλες γεωμετρικές και αρν. διων.

T_n = # δοκιμών μέχρι την 1^n επιτυχία

$$P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, \quad k = n, n+1, \ldots$$

T_1' = # αποτυχιών ως την 1^n επιτυχία

$$P(T_1' = k) = P(T_1 = k+1) = \binom{k}{n-1} p^n (1-p)^{k+1-n}, \quad k = n-1, n, \ldots$$

(δηλ, $T_1' = T_1 - 1$).

$$E[T_1'] = E[T_1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$$Var[T_1'] = Var[T_1 - 1] = Var[T_1] = \frac{1-p}{p^2}$$

$T_n' = \#$ αποτυχιών ως την n-οστη επιτυχια

$$P(T_n' = k) = P(T_n = k+n) = \binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k, \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$T_n' = T_n - n$$

οπότε,

$$E[T_n'] = \frac{n}{p} - n = \frac{n(1-p)}{p}$$

$$Var[T_n'] = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

4. Κατανομή Poisson

$X \sim Poisson(\lambda)$

$\Leftrightarrow X \sim Bin(n, p_n)$, με n μεγαλο, p_n μικρό ωστε $n \cdot p_n = \lambda$

$$P(X=k) = \lim_{n\to\infty} P(\underset{\substack{\wr \\ Bin(n, \frac{\lambda}{n})}}{Y=k}) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,\dots$$

* Σειρά-κλειδί: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t \quad \left(\xrightarrow{d/dt} \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{t^{k-1}}{k!} \overset{(\heartsuit)}{=} e^t\right)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot \lambda e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ άρα $Var[X] = \lambda$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

με 2η παραγ. στην $(\heartsuit)$