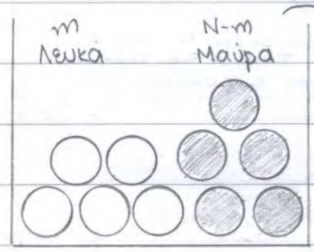
01/11/2017 **ΜΑΘΗΜΑ 17**

Ειδικές Διακριτές Κατανομές III

1. Το μοντέλο εξαγωγής σφαιριδίων από κάλπη



Εξαγωγή n σφαιριδίων

N σφαιρίδια

X = # Λευκών σφαιριδίων από n που εξήχθησαν.

2 περιπτώσεις : Με επανάθεση / Χωρίς επανάθεση

• 1η Περίπτωση: Με επανάθεση

$X \sim Bin\left(n, \frac{m}{N}\right) \qquad P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{m}{N}\right)^k\left(1-\frac{m}{N}\right)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$

$E[X] = \frac{nm}{N}, \quad Var[X] = n \cdot \frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$

• 2η Περίπτωση: Χωρίς επανάθεση

X ~ Υπεργεωμετρική

HyperGeom (n, N, m)

$P(X=k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \le k \le n$

Ευνοϊκό αποτέλεσμα για $X=k$: k Λ και n-k M

Για να φτιάξω ευνοϊκό αποτέλεσμα :

1ο στάδιο: Διαλέγω k Λ από τα m → $\binom{m}{k}$ τρόποι

2ο στάδιο: " n-k M " N-m → $\binom{N-m}{n-k}$ τρόποι

Από πολ/κή αρχή $\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}$ ευνοϊκά

Πότε $P(X=k) > 0$;

Πρέπει $0 \le k \le n$,

$0 \le k \le m$

$0 \le n-k \le N-m$

Άρα, $P(X=k) > 0$ για $\max(0, n+m-N) \le k \le \min(n, m)$.

* Αθροισμα-κλειδί για την υπεργεωμετρική (Τύπος του Cauchy) $\rightarrow$ $\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$, $r, s, n \geq 0$ ακέραιοι

Απόδειξη τύπου Cauchy : $\underline{\Omega} = \{\underbrace{1, 2, \ldots, r}_{\text{κόκκινα}}, \underbrace{r+1, \ldots, r+s}_{\text{πράσινα}}\}$

για να το υπολογίσω έχω χρησιμ. πολ/κή αρχή

$\binom{r+s}{n}$ = # υποσυνόλων του $\underline{\Omega}$ με n στοιχεία $= \sum_{k=0}^{n}$ # υποσυνόλων του $\underline{\Omega}$ με n στοιχεία εκ των οποίων k κόκκινα.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{m}} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k}\, \frac{m}{\cancel{k}} \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{m}} \overset{k-1=j}{=}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{m}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}$$

$$\underset{\text{Cauchy}}{\overset{\text{Τύπος}}{=}} \frac{m}{\binom{N}{m}} \cdot \binom{m-1+N-m}{n-1} = \frac{m}{\binom{N}{m}} \binom{N-1}{n-1} = \frac{m \binom{\cancel{N-1}}{m-1}}{\frac{N}{n}\binom{\cancel{N-1}}{\cancel{n-1}}} = \frac{m \cdot n}{N}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{m}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{m}} \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{m}{k} \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{m}} \sum_{k=1}^{n} k \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} = \frac{m}{\binom{N}{m}} \sum_{k=1}^{n} (k-1+1) \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k}$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{m}} \left(\sum_{k=1}^{n} (k-1) \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} \right)$$

$$= \frac{m}{\binom{N}{m}} \left(\sum_{k=2}^{n} (\cancel{k-1}) \frac{m-1}{\cancel{k-1}} \binom{m-2}{\underset{j}{k-2}}\binom{N-m}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{m-1}{\underset{j}{k-1}}\binom{N-m}{n-k} \right)$$

$$= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{m-2}{j}\binom{N-m}{n-2-j} + \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}$$

στα Γεωμ μεση τιμή
Poisson και ελέγξω
διωνυμική και

$$\binom{N}{m} = \frac{N}{m}\binom{N-1}{m-1} = \frac{N}{m}\cdot\frac{N-1}{m-1}\binom{N-2}{m-2}$$

$$= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}}\binom{\cancel{m}-2+N-\cancel{m}}{n-2} + \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}}\binom{\cancel{m}-1+N-\cancel{m}}{n-1}$$

$$= \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}}\binom{N-2}{n-2} + \frac{m(m-1)}{\binom{N}{m}}\binom{N-1}{n-1}$$

$$= \frac{m(m-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{m\cdot n}{N}$$

άρα

$$Var[x] = \frac{m(m-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{m\cdot n}{N} - \frac{m^2 n^2}{N^2}$$

$$= \frac{N m(m-1)n(n-1) + m\cdot n N(N-1) - m^2 n^2 (N-1)}{N^2(N-1)}$$

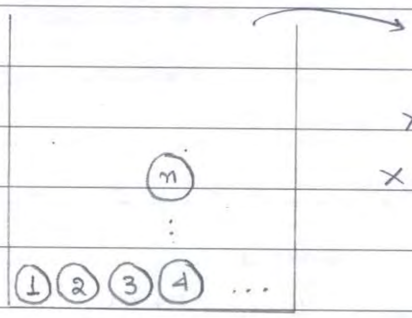
$$= n\,\frac{m}{N}\cdot\frac{N m(m-1)(n-1) + N(N-1) - m n(N-1)}{N(N-1)}$$

$$= n\cdot\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$$

Σύγκριση μοντέλων

	Με επανάθεση	Χωρίς επανάθεση
	$X \sim Bin(n, m/N)$	$HyperGeom(n, N, m)$
$P(X=k) =$	$\binom{n}{k}\left(\frac{m}{N}\right)^k\left(1-\frac{m}{N}\right)^{k-1}$	$\left[\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}\right] / \binom{N}{n} \quad 0 \le k \le n$
$E[x] =$	$\frac{n\cdot m}{N}$	$n\cdot\frac{m}{N}$
$Var[x] =$	$n\,\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)$	$n\,\frac{m}{N}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)$

2. Το μοντέλο επιλογής αριθμού ομοιόμορφα από n



Επιλογή ενός αριθμού

X = ένδειξη

$X \sim$ Διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \ldots, n\}$

$$P(X=k) = \frac{1}{n}, \quad 1 \le k \le n$$

$$E[X] = \sum_k k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = \frac{n+1}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$E[X^2] = \sum_k k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Άρα,

$$Var[X] = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \ldots$$

$$= \frac{n^2-1}{12}$$

3. Σύνοψη Ειδικών Διακριτών

(να ξέρω πώς βγαίνουν σε όλες οι σ.π και στη διωνυμική τα πάντα).

1. Bernoulli (p)
2. Bin (n, p)
3. Geom (p)
4. Neg Bin (n, p)
5. Poisson (λ)

ένα μοντέλο

6. HyperGeom (n, N, m)
7. Uniform $(\{1, 2, \ldots, n\})$

! Αθροίσματα κλειδιά:

Bernoulli $\rightarrow$ $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$

Geom $\longrightarrow$ $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$

Neg Bin $\rightarrow$ $\frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} t^k$

Poisson $\rightarrow$ $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$

Hyper Geom $\rightarrow$ $\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$

Uniform $\rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

03-11-2017 ΜΑΘΗΜΑ 18

Ασκήσεις στις Διακριτές Κατανομές

1. Άσκηση

Αεροπλάνα $\nearrow$ 2-κινητ, $\searrow$ 4-κινητ

πιθ. βλάβης κινητήρα $= p$

Οι κινητήρες λειτουργούν ανεξάρτητα

Πετάει $\Leftrightarrow$ Λειτουργούν $\geq$ μισοί κινητήρες $\longrightarrow$ 2-κινητ. πετάει $\Leftrightarrow$ τουλ 1 κιν. λειτουργεί. 4-κινητ πετάει $\Leftrightarrow$ τουλ 2 »

Για ποιες τιμές του p είναι ασφαλές το δικινητήριο;

Λύση:

Ασφαλέστερο το 2-κιν

$\Leftrightarrow$ πιθ. πτώσης 2-κιν < πιθ. πτώσης 4-κιν

$$\Leftrightarrow \underbrace{\binom{2}{2} p^2 (1-p)^0}_{p^2} < \underbrace{\binom{4}{3} p^3 (1-p)^1}_{4p^3(1-p)} + \underbrace{\binom{4}{4} p^4 (1-p)^0}_{p^4}$$

$$\Leftrightarrow p^2 < 4p^3(1-p) + p^4$$

$$\overset{0<p<1}{\Longleftrightarrow} 1 < 4p(1-p) + p^2$$

$$\Leftrightarrow 3p^2 - 4p + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (3p-1)(p-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow p \in (1/3, 1)$$

2. Άσκηση

N πούλμαν

N_i = # πούλμαν που έχουν i άτομα (επιβ + οδηγό) , $i = 1, 2, \ldots, m$

Πείραμα τύχης 1: επιλέγω οδηγό

X = # ατόμων στο πούλμαν του οδηγού

Πείραμα τύχης 2: επιλέγω τυχαία άτομο

$Y = \#$ ατόμων στο πούλμαν του επιβάτη.

X, Y δεν έχουν την ίδια κατανομή, ούτε την ίδια σ.π (όχι ισόνομες)

$$P(X=k) = \frac{N_k}{\sum_{i=1}^{m} N_i}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

N_k: # οδηγών σε πούλμαν με k άτομα

$\sum_{i=1}^{m} N_i$: # οδηγών

$$P(Y=k) = \frac{k \cdot N_k}{\sum_{i=1}^{m} i N_i}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$k \cdot N_k$: # ατόμων σε πούλμαν με k άτομα.

$\sum_{i=1}^{m} i N_i$: # ατόμων

πχ. 1 πούλμαν με 50 άτομα (1 οδηγό, 49 επιβ)

50 πούλμαν με 1 άτομο (1 οδηγό)

- αν ρωτήσω οδηγό:

$$P(X=k) = \begin{cases} 50/51 & , k=1 \\ 1/51 & , k=50 \end{cases} \qquad E[X] = \frac{100}{51} \simeq 2$$

- αν ρωτήσω επιβάτη:

$$P(Y=k) = \begin{cases} 1/2 & , k=1 \\ 1/2 & , k=50 \end{cases} \qquad E[Y] = \frac{51}{2} = 25.5$$

3. Άσκηση (πέφτουν τέτοια)

X διακριτή τ.μ. με σ.π. $P(X=k) = c(1+k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$c = ;$, $E[X] = ;$, $Var[X] = ;$, $P(X=1 \mid X \leq 2) = ;$

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} c(1+k) = 1$$
$$\Rightarrow c \cdot \sum_{k=0}^{n} (1+k) = 1$$
$$\Rightarrow c\left(n+1+\sum_{k=0}^{n} k\right) = 1$$
$$\Rightarrow c\left(n+1+\frac{n+1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

μήπως $c = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n+1}$

$$E[x] = \sum_k k\,P(X=k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k(1+k) =$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k^2}_{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \Big) = \frac{2n}{2(n+2)} \left(1 + \frac{2n+1}{3}\right) =$$

$$= \frac{n(2n+4)}{3(n+2)} = \frac{2n\,\cancel{(n+2)}}{3\,\cancel{(n+2)}} = \frac{2n}{3}$$

$$Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$E[x^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k^2(1+k) =$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

άρα

$Var[x] = \ldots$

$$P(X=1 \mid X \leq 2) = \frac{P(X=1, X\leq 2)}{P(X\leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X\leq 2)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} =$$

$$= \frac{2}{1+2+3} = 2/6 = 1/3$$

4. Άσκηση

Συσκευασία 10 λαμπτήρων

πιθ. λαμπτήρας να χαλάσει μέσα σε ένα μήνα = 1 ‰ = 0,001

Η εταιρία αποζημιώνει $\Leftrightarrow$ καούν τουλ. 2 λαμπτήρες σε 1 μήνα λειτουργίας

Ραποζημείωσης = ;

10 δοκιμές Bernoulli

επιτυχία = να καεί

$p = P(\text{επιτυχίας}) = 0{,}001$

$X = \#$ λαμπτήρων που καιγ. τον 1^o μήνα

$\sim Bin(10, 0{,}001)$

άρα,

$$P_{αποζ} = P(X \geq 2)$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - \binom{10}{0}(0{,}001)^0(0{,}999)^{10} - \binom{10}{1}(0{,}001)^1(0{,}999)^9$$

5. Άσκηση

$X \sim Poisson(\lambda)$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

1. Να αποδείξετε ότι:

$$E[X \cdot h(X)] = \lambda E[h(X+1)]$$

2. Υπολογίστε:

$E[X]$, $Var[X]$

Λύση:

* χρησιμοποιώ τύπο αφηρημένου στατ.

1. $$E[\underbrace{X \cdot h(X)}_{g(x) = h(x)\cdot x}] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot h(k) \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \cancel{k} \cdot h(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{\cancel{k!}\ (k-1)!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} h(k)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(\underbrace{k-1}_{j})!} = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} h(j+1)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} h(j+1)\, P(X=j) = \lambda E[h(X+1)]$$

* και εδώ

2. Για $h(x) = 1$, έχω:

$$E[X] = \lambda \cdot \underbrace{E[1]}_{=1} = \lambda, \quad Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 =$$

Για $h(x) = x$, έχω:

$$E[X^2] = \lambda E[X] + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

άρα,

$$Var[X] = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

6. Άσκηση

μας θυμίζει τη Γεωμετρική

$$P(X=k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} \quad , k \geq 1$$

, X = # ρίψεων νομίσματος μέχρι να έρθει Κ

(πιθ. κορ → 1/3 , πιθ. γραμ. → 2/3)

$P(X \text{ περιττός}) = ;$

Λύση:

$$P(X \text{ περιττός}) = \sum_{k \text{ περιττός}} P(X=k)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(X = 2j+1)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2j} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{j} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 4/9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{3}{5}$$

2ος τρόπος:

$$P(X \text{ περιττός}) \underset{\text{Θ.Ο.Π}}{=}$$

B_1 : έρχεται Κ στην 1η ρίψη ($X=1$)

B_2 : έρχεται Γ στην 1η και Κ στην 2η ρίψη ($X=2$)

B_3 : έρχονται Γ στις 2 πρώτες ρίψεις ($X \geq 3$)

$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} P(A)$$

Άρα,

$$P(A) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} P(A)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9} P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$$

7. Άσκηση

10 βολές σε στόχο

P(4 επιτυχίες) = 3 P(3 επιτυχίες)

1. ευστοχία = P(επιτυχία σε 1 ρίψη) = ;
2. πιθ. σε 5 βολές να έχει 2 επιτυχίες = ;
3. » να πετυχαίνει όλες ή καμία = ;
4. δεσμευμ πιθ. σε 5 βολές να έχει το πολύ 4 επιτυχ. δεδομένου ότι έχει τουλ. 2 επιτυχίες = ;

Λύση:

1. $X = \#$ επιτυχιών σε 10 βολές.

$X \sim Bin(10, \underset{\text{ευστοχία}}{p})$

Από υπόθεση: $P(X=4) = 3P(X=3)$

$$\Rightarrow \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3 \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7$$

$$\Rightarrow \frac{10!}{6!\,4!} p = 3 \frac{10!}{3!\,7!} (1-p)$$

$$\Rightarrow 7p = 3 \cdot 4(1-p)$$

$$\Rightarrow 7p = 12 - 12p$$

$$\Rightarrow 19p = 12$$

$$\Rightarrow p = 12/19$$

$Y = \#$ επιτυχ. σε 5 βολές

$Y \sim Bin(5, \underset{p}{12/19})$

2. $P(Y=2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3$

3. $P(Y=0) + P(Y=5) = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0 = (1-p)^5 + p^5$

4. $P(Y \le 4 \mid Y \ge 2) = \dfrac{P(2 \le Y \le 4)}{P(Y \ge 2)} = \dfrac{P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)}{1-P(Y=0)-P(Y=1)} = \dots$

06/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 19

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Αν X διακριτή $P(X\in B) = \sum_{x\in B} \overbrace{P(X=x)}^{f_X(x)\ \text{συνάρτηση πιθανότητας}}$

1. Ορισμός

Μια τ.μ. λέγεται (απόλυτα) συνεχής αν υπάρχει $f_X: \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ώστε $P(X\in B) = \int_B f_X(x)\,dx$

Η $f_X(x)$ λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) ή απλά πυκνότητα της X.

2. Ιδιότητες της σ.π.π.

1. $f_X(x) \geq 0$, $x\in\mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$

$A=\emptyset \Rightarrow P(A)=0$
ενώ
$P(A)=0 \nRightarrow A=\emptyset$

3. $P(a\leq X\leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$
$= P(a<X<b)$
$= P(a\leq X<b)$
$= P(a<X\leq b)$

4. $P(X=x) = \int_x^x f_X(x)dx = 0$, $x\in\mathbb{R}$

5. Σχέση σ.κ και σ.π.π.

$\underset{\uparrow\ \text{σ.κ. της } X}{F_X(x)} = P(X\leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

6. Η $f_X(x)$ μπορεί να είναι >1.

πχ $f_X(x) = \begin{cases} 2, & x\in[0,1/2] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

7. $f_X(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{P(x\leq X\leq x+h)}{h}$

για $h>0$

$P(x\leq X\leq x+h) = f_X(x)h + o(h)$

όπου $o(h)$ τ.ω. $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$

πχ
Αν X συνεχής και $f_X(3) = 2$, τότε
$P(3<X\leq 3.001) \simeq 0,002$

3. Μέση τιμή - Διασπορά - Τυπική απόκλιση.

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$ υπό την προϋπόθεση $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$\sigma_X = SD[X] = \sqrt{Var[X]}$$

4. Ιδιότητες

1. $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx$

2. $E[aX+b] = a \cdot E[X] + b$

3. $Var[aX+b] = a^2\, Var[X]$

4. $\sigma_{aX+b} = |a| \cdot \sigma_X$

5. $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

(οι αποδείξεις τους σε πλήρη αντιστοιχία με τις διακριτές)

5. Εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού μέσης τιμής για συνεχείς, μη αρνητ. τ.μ.

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$

με $X \geq 0$ (αυτό σημαίνει ότι $f_X(x) = 0,\ x<0$)

τότε

$$E[X] = \int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \underbrace{(1 - F_X(x))}_{\bar{F}_X(x)}\,dx$$

$\underbrace{\bar{F}_X(x)} = 1 - F_X(x) = P(X>x)$

συνάρτηση επιβίωσης

ή αξιοπιστίας της Χ

Απόδειξη: $E[X] \overset{ορσ}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \underset{=}{\overset{X>0}{=}} \int_0^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{x} dy\, f_X(x)\,dx$$

$$\overset{0\le y\le x<\infty}{=} \int_0^{\infty} \underbrace{\boxed{\int_y^{\infty} f_X(x)\,dx}}_{\substack{\| \\ P(X>y) \text{ ή } P(X\ge Y)}} dy \quad (\text{το ίδιο είναι})$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - F_X(y))\,dy \quad \leftarrow (\text{χρήσιμος τύπος})$$

6. Άσκηση

Χ συνεχής τ.μ με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$Y = X^2$, $Z = e^X$

Να υπολογιστούν: (i) $c = ;$

(ii) $F_X(x)$, $E[X]$;

(iii) $F_Y(y)$, $f_Y(y)$, $E[Y]$; ← τα ίδια για την Z

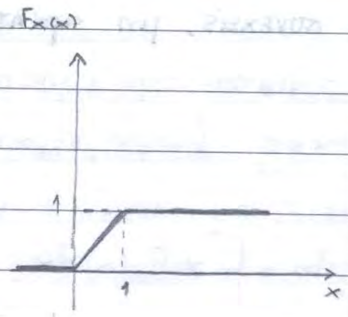
Λύση:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 c\cdot dx = 1 \Rightarrow c = 1$

άρα $f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

(ii) $\underset{\substack{\| \\ P(X\le x)}}{F_X(x)} = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x 1\,du = x, & x \in [0,1] \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

$\cancel{\int_{-\infty}^{0}} + \underbrace{\int_0^1}_{\substack{\| \\ 1}} + \int_1^x$



$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2^{os} τρόπος:

Επειδή $X \geq 0$:

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$$

(iii)

$Y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \underbrace{P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})}_{F_X(\sqrt{y}) - \overset{0}{F_X(-\sqrt{y})}} & , y>0 \end{cases}$$

$$P(\alpha \leq X \leq b) = F_X(\alpha) - F_X(b)$$

κοιτάζω τον 1^o κλάδο της $F_X(x)$

$$= \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \sqrt{y} & , 0 \leq \sqrt{y} \leq 1 \\ 1 & , \sqrt{y} > 1 \end{cases}$$

Άρα,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ \sqrt{y} & , 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & , y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ 1/2\sqrt{y} & , 0<y<1 \\ 0 & , y \geq 1 \end{cases}$$ ← (δεν έχει σημασία πού θα βάλω το =)

• 1^{os} τρόπος:

$$E[Y] \overset{Y \geq 0}{=} \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y))\,dy = \int_0^1 (1-\sqrt{y})\,dy = y - \frac{y^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• 2^{os} τρόπος:
(αφηρημένου στατιστικού)

$$E[Y] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

• 3^{os} τρόπος:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{2}\,dy = \frac{y^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

08/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 20

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

1. Γραμμική Συνάρτηση συνεχούς τ.μ.

X συνεχής τ.μ με σ.π.π. $f_X(x)$ και σ.κ. $F_X(x)$

$Y = aX + b$, $a \neq 0$

$E[Y] = a\,E[X] + b$

$Var[Y] = a^2\,Var[X]$

$\sigma_Y = |a|\,\sigma_X$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b)$$

$$= \begin{cases} P(X \leq (y-b)/a) & , a>0 \\ P(X \geq (y-b)/a) & , a<0 \end{cases} = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & , a>0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & , a<0 \end{cases}$$

$$P(X \geq (y-b)/a) = 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} & , a>0 \\ -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} & , a<0 \end{cases}$$

$$= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

2. (Συνεχής) Ομοιόμορφη Κατανομή

Μοντέλο: Τυχαία επιλογή σημείου στο $[a,b]$

X = σημείο που επιλέχθηκε

$$\overline{\quad {}_a[\qquad\qquad]_b \quad}$$

X συνεχής τ.μ.

$$f_X(x) = \begin{cases} c & , x \in [a,b] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$X \sim$ ομοιόμορφη στο $[a,b]$ (Uniform($[a,b]$))

3. Υπολογισμοί για την Uniform ([0,1]).

$X \sim \text{Uniform}([0,1])$

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

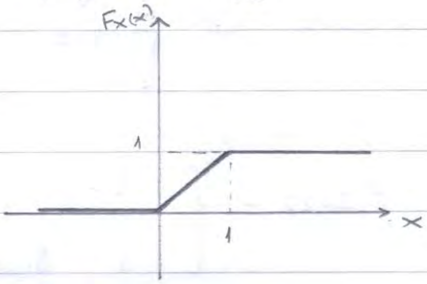
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 c\,dx = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^n f_X(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{n+1}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



4. Υπολογισμός για την Uniform ([a,b]).

$X \sim \text{Uniform}([0,1]) \Rightarrow Y = a + (b-a)X \sim \text{Uniform}([a,b])$.

Απόδειξη:

ο σταθερος ορος εδώ είναι το α

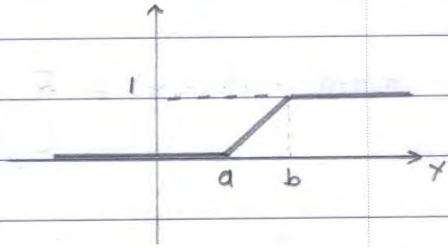
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{|b-a|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le y \le b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$E[Y] = (b-a)\,E[X] + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[Y] = (b-a)^2 \cdot Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & , y < a \\ \frac{y-a}{b-a} & , a \le y \le b \\ 1 & , y > b \end{cases}$$



5. **Άσκηση** (συνέχεια του 6. του προηγ. μαθήματος)

$X \sim Uniform([0,1])$

$Z = e^X$

$F_Z(z)$, $f_Z(z)$, $E[Z]$, $Var[Z]$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(e^X \le z) = P(X \le \ln z)$$

$$= F_X(\ln z) = \begin{cases} 0 & , \ln z < 0 \\ \ln z & , 0 < \ln z < 1 \\ 1 & , \ln z \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z \le 1 \\ \ln z, & 1 < z < e \\ 1, & z \ge e \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 1/z, & 1 < z \le e \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$ είναι ίδιο και ίσο να βάλω

$E[Z] \rightarrow$ 3 τρόποι (1^{os} ορισμός, 2^{os} τύπος αφηρ. στατιστ., 3^{os} εναλλακτικός ορισμός για συνεχείς μη αρν. τ.μ.)

1^{os}: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_1^e z \frac{1}{z} dz = e - 1$

2^{os}: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_X(x) dx = \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx = e^1 - e^0 = e - 1$

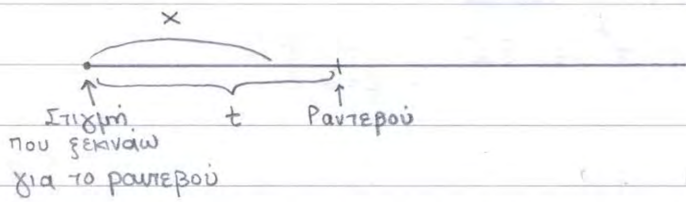
3^{os}: $E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_Z(z)) dz = \int_0^1 1 \, dz + \int_1^e (1 - \ln z) dz = \ldots = e - 1$

6. Άσκηση

Ραντεβού

X συνεχής τ.μ.: χρόνος που απαιτείται για να φτάσω στον τόπο του ραντεβού

t: Μεταβλητή απόφασης (πόσο νωρίτερα να ξεκινήσω)



c: κόστος ανά χρ. μονάδα που φθάνω νωρίτερα.

κ: κόστος ανά χρ. μονάδα που φθάνω αργότερα.

Βέλτιστο $t =$;

Μέσο κόστος ως συνάρτηση του t $= C(t)$

Κόστος ως συνάρτηση του t, X $= \begin{cases} c\cdot(t-x), & x<t \\ \kappa\cdot(x-t), & x>t \end{cases}$

τ.μ. $Y = g_t(X)$

Άρα, $C(t) = E[g_t(X)] =$;

τύπος αφηρημ. στατιστικού

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x) f_X(x)\,dx$$

ο χρόνος μη αρν. $X \geq 0$

$$= \int_{0}^{\infty} g_t(x) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^t c\,(t-x) f_X(x)\,dx + \int_t^\infty \kappa\,(x-t) f_X(x)\,dx$$

$$= c\cdot t \underbrace{\int_0^t f_X(x)dx}_{=F_X(t)} - c\int_0^t x f_X(x)dx$$

$$+ \kappa\int_t^\infty x f_X(x)dx - \kappa t \underbrace{\int_t^\infty f_X(x)dx}_{=(1-F_X(t))} =$$

Βελτιστοποιώ την $c(t)$:

$$\frac{d}{dt} c(t) = 0$$

$$\Rightarrow c \cdot F_x(t) + c\,t\,\cancel{f_x}(t) - c\,t\,\cancel{f_x}(t) - k\,t\,\cancel{f_x}(t) - k(1 - F_x(t)) + k\,t\,\cancel{f_x}(t) = 0$$

$$\Rightarrow (c+k)\, F_x(t) = k$$

βέλτιστο

$$\Rightarrow F_x(t) = \frac{k}{c+k} \iff t^* = F_x^{-1}\left(\frac{k}{c+k}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} c(t) = (c+k)\, f_x(t) \geq 0$$

<u>Συγκεκριμένο παράδειγμα:</u>

$X \sim$ Uniform $([25, 40])$

c = κόστος "νωρίτερα"

k = κόστος "αργότερα"

με $k = 3c$

Πότε πρέπει να ξεκινήσω;

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 25 \\ \frac{x-25}{40-25}, & 25 \leq x \leq 40 \\ 1, & x > 40 \end{cases}$$

Βέλτιστο t^*:

$$F_x(t^*) = \frac{k}{c+k} = \frac{3c}{c+3c} = \frac{3}{4}$$

άρα $\frac{t^* - 25}{15} = \frac{3}{4} \iff t^* = 36,25$ λεπτά

7. Άσκηση

Έστω ράβδος μήκους 1 και p σταθερό σημείο σε αυτήν.

Κόβω σε ένα εντελώς τυχαία επιλεγμένο σημείο τη ράβδο

X = σημείο κοπής $\sim$ Uniform $([0, 1])$

Έστω

Y = Μήκος του κομματιού που περιέχει το p

$E[Y] = ;$

$$Y = g(x) = \begin{cases} 1-x, & x<p \\ x, & x>p \end{cases}, \quad \text{δηλ.} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x, & x<p \\ x, & x>p \end{cases}$$

άρα,

$$E[Y] = E[g(x)]$$

$$\overset{\text{τύπος αφηρημένου}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \underbrace{f_X(x)}_{=1} dx$$

$$= \int_0^1 g(x)\, dx$$

$$= \int_0^p (1-x)\, dx + \int_p^1 x\, dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_{x=0}^{p} + \frac{x^2}{2}\Big|_{x=p}^{1}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{2} + p(1-p)$$

10/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 21

Εκθετική Κατανομή και άλλες συνεχείς κατανομές για χρόνους ζωής

1. Μοντέλο

Πείραμα τύχης → Χρόνος (ζωής, μέχρι να συμβεί κάτι)

X συνεχής, ≥ 0

$$\lambda_X(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h}$$

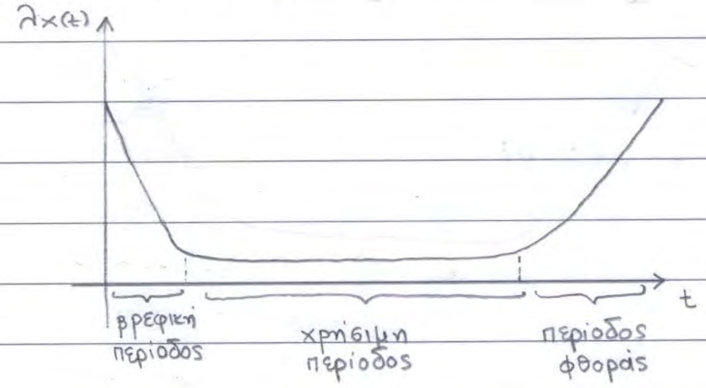
(δεδομένου ότι ζει ακόμα, ποια η πιθανότητα να πεθάνει στο επόμενο διάστημα)

= Ρυθμός βλάβης, αποτυχίας, κινδύνου

Βαθμίδα αποτυχίας (failure/hazard rate).

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\text{πιθανότητα βλάβης σε διάστημα μήκους } h \text{ για ηλικία } t}{h}$$

Η συνήθης μορφή του $\lambda_X(t)$ για χρόνους ζωής που εμφανίζονται σε φυσικά ή τεχνολογικά προβλήματα είναι:



Λεκανοειδής καμπύλη (bathtube curve)

Στα τεχνολογικά συστήματα στην αρχή υπάρχει δοκιμαστική περίοδος λειτουργίας και υπάρχουν οδηγίες συντήρησης / αντικατάστασης σε συγκεκριμένη ηλικία.

Ο χρόνος ζωής που βλέπεις, έχει σταθερή βαθμίδα αποτυχίας.

2. Εκθετική κατανομή

$X \sim Exp(\lambda) \longleftrightarrow X \geq 0$, συνεχής

Εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. $\qquad \lambda_X(t) = \lambda \quad , t \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma.\kappa \\ \sigma.\pi.\pi. \\ E[X^n] \\ Var[X] \end{array}\right) \; ;$$

$$X \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = 0 \quad , x<0$$

$$f_X(x) = 0 \quad , x<0$$

$$\lambda_X(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+h \mid X > x)}{h}$$

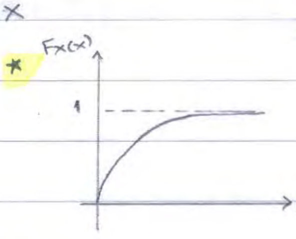
$$= \underbrace{\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{P(x < X \leq x+h, X>x)}{h}}}_{f_X(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{P(X>x)}_{1-F_X(x)}} = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}$$

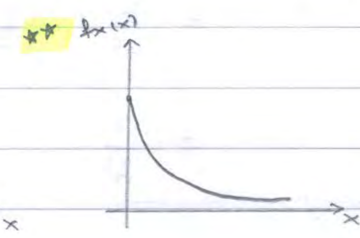
Έστω $g(x) = 1 - F_X(x) \; , x \geq 0 \quad , \quad f_X(x) = -g'(x)$

$$-\frac{g'(x)}{g(x)} = \lambda \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = -\lambda \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log(g(x)) = -\lambda$$

$$\Leftrightarrow \log g(x) - \cancel{\log \overset{1}{g(0)}}^{\,0} = -\lambda x$$

$$\Leftrightarrow g(x) = e^{-\lambda x} \quad , x > 0$$





Άρα,

$$\overset{*}{F_X(x)} = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases} \quad , \quad \overset{**}{f_X(x)} = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases}$$

$$E[X^n] = \int_0^\infty x^n f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^n (-e^{-\lambda x})'\,dx$$

$$= \overset{0}{\left[-x^n e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{\infty}} + \int_0^\infty n \cdot x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{n}{\lambda} \cdot \int_0^\infty x^{n-1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}]$$

Άρα,

$$E[X^n] = \frac{n}{\lambda} E[X^{n-1}] = \frac{n}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{\lambda} E[X^{n-2}] = \frac{n(n-1)(n-2)}{\lambda^3} E[X^{n-3}]$$

$$= \dots$$

$$= \frac{n!}{\lambda^n} \overset{=1}{E[X^{n-n}]}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Η αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής.

Πρόταση:

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow \underbrace{P(X > s+t \mid X > s)}_{\substack{\shortparallel \\ P(X-s > t \mid X > s)}} = P(X > t) \quad , t, s > 0$$

Απόδειξη:

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t,\ X > s)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(s)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - F_X(t) = P(X > t).$$

4. Η ιδιότητα κλίμακας της εκθετικής

$$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow a \cdot X \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

$a > 0$

Απόδειξη:

$Y = a \cdot X$

$$y > 0,\ F_Y(y) = P(Y \le y) = P(aX \le y) = P\left(X \le \frac{y}{a}\right) = F_X\left(\frac{y}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{y}{a}} = 1 - e^{-\lambda/a \cdot y}$$

$$\Rightarrow Y \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

5. Η κατανομή Γάμμα

$X \sim Gamma(a, \lambda) \Leftrightarrow X \geq 0$, συνεχής

$\lambda > 0$

$a > 0$

σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ c \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases}$$

για $\alpha=1$
γίνεται η
εκθετική

$c = ;$

$E[X] = ;$ ★

$Var[X] = ;$

$E[X^n] = ;$

6. Η συνάρτηση Γάμμα

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Ιδιότητες

1. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{x=0}^{\infty} = 1$

2. $\alpha > 1 \Rightarrow \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

Απόδειξη:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1} (-e^{-x})' dx = \overset{0}{\cancel{[-x^{\alpha-1} e^{-x}]_{x=0}^{\infty}}} + \int_0^\infty (\alpha-1) x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

$$= (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

$$= (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1)$$

3. $n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$
$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$= (n-1)(n-2)\dots 1 \cdot \overbrace{\Gamma(1)}^{=1}$$
$$= (n-1)!$$

7. Υπολογισμοί στην κατανομή Γάμμα

$c = ;$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} c \cdot x^{\alpha-1} e^{-\overset{=y}{\lambda x}} dx = 1$$

$$\Rightarrow c \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow c \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{\lambda^{a}}{\Gamma(\alpha)}$$

$X \sim \text{Gamma}(a, \lambda) \Leftrightarrow X \geq 0$, συνεχής με $f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \end{cases}$

$$E[X^n] = \int_0^{\infty} x^n \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^{\cancel{\alpha}}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^{n+\cancel{\alpha}}} \boxed{\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n+a}}{\Gamma(n+a)} x^{n+\alpha-1} e^{-\lambda x} dx}_{\text{σ.π.π της Gamma}(n+a,\lambda)}} = 1$$

$\alpha > 1$
$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1)$

$$= \frac{(n+\alpha-1)\,\Gamma(n+\alpha-1)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots(n+\alpha-n)\,\Gamma(\cancel{n}+\alpha-\cancel{n})}{\Gamma(\cancel{\alpha}) \cdot \lambda^n}$$

$$= \frac{(n+\alpha-1)(n+\alpha-2)\dots\alpha}{\lambda^n}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)}{\lambda^n}$$

Άρα,

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$
$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

8. Κατανομή Erlang

$X \sim$ Erlang (n, λ) $\iff$ $X \geq 0$, συνεχής με σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \end{cases}$

↑ φυσικός

$X \sim$ Erlang (n, λ) $\iff$ X χρόνος ζωής που αποτελείται από n Exp(λ).

$X \sim Uniform([y,z])$
$\Downarrow$
$aX+b \sim Uniform([ay+b, az+b])$

$X \sim Exp(\lambda)$
$\Downarrow$
$aX \sim Exp(\frac{\lambda}{a})$

13/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 22

Η Κανονική Κατανομή

1. Ορισμός:

X τ.μ. συνεχής με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$

με μ, σ^2 παράμετροι

Η X λέγεται κανονική τ.μ. $\sim N(\mu, \sigma^2)$

2. Βασικό Ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

3. Γραμμικές Συναρτήσεις κανονικών τ.μ.

Θεώρημα:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

Απόδειξη:

X συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$

$Y = aX+b$
$\Downarrow$
Y συνεχής με σ.π.π. $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$

Αφού $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$,

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2/2\sigma^2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{[y-(a\mu+b)^2]}{2(|a|\sigma)^2}}, \quad y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow Y = aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

4. Πόρισμα

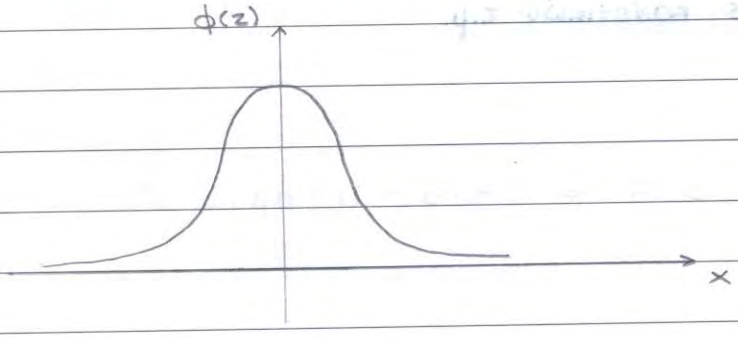
1. $X \sim N(0,1) \Rightarrow \sigma X+\mu \sim N(\mu,\sigma^2)$
2. $Y \sim (\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

5. Ορισμός:

$Z \sim N(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική με σ.π.π. $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$

και σ.κ. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$, $x\in\mathbb{R}$

6. Βασικοί υπολογισμοί στην $N(0,1)$



1. $\phi(z) > 0$, $z\in\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1$ (λόγω του βασικού ολοκληρώματος)
3. $\phi(z) = \phi(-z)$ (άρτια)
4. $Z \sim N(0,1)$

   $E[Z] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} z\, \phi(z)\, dz = 0$ $(\phi(z) = \phi(-z))$
5. $Z \sim N(0,1)$

   $Var[Z] = 1$, γιατί:

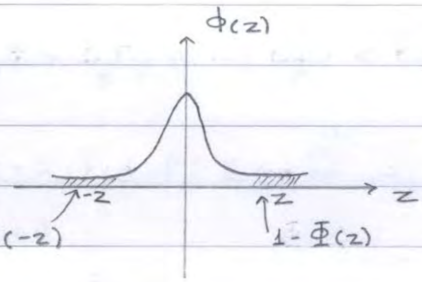
$$Var[Z] = E[Z^2] - (\overset{0}{E[Z]})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \phi(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2}\,dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z\left(-e^{-z^2/2}\right)'\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\overset{0}{\cancel{-z e^{-z^2/2} \Big|_{z=-\infty}^{\infty}}} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz \right)$$

$$= 1$$

6. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$

7. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$



8. $\Phi(3) \simeq 0{,}999$

Δηλ χρειαζόμαστε τιμές της Φ στο $[0,3]$

7. Πόρισμα

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

τότε,

$E[X] = \mu$ και $Var[X] = \sigma^2$

Απόδειξη:

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \sigma Z + \mu$, $Z \sim N(0,1)$

$\Rightarrow E[X] = \sigma E[Z] + \mu = \mu$, $Var[X] = \sigma^2 Var[Z] = \sigma^2$

8. Παράδειγμα

$X \sim N(3, 4)$

i. $E[X] = ;$

ii. $\sigma_X = ;$

iii. $P(2 \le X \le 5) = ;$

iv. $P(X = 3) = ;$

v. $P(X > 3) = ;$

vi. $P(X > 0) = ;$

vii. $P(|X-3| > 4) = ;$

Λύση:

i. $E[X] = \mu = 3$

ii. $\sigma_X = \sigma = 2$

iii. $P(2 \le X \le 5) = P\left(\frac{2-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{2-3}{2} \le \underset{N(0,1)}{\underbrace{Z}} \le \frac{5-3}{2}\right)$

$= P(-0,5 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-0,5) = \Phi(1) - 1 + \Phi(0,5)$

$= 0.8413 - 1 + 0.6915$

x	0.00	0.01	0.02	...	0.08	0,09
0.0						
0.1						
0.2						
0,3						
⋮						
1.2					$\boxed{0.8997}$ $\Phi(1.28)$	
⋮						
3.4						

iv. $P(X=3) = 0$ (γιατί X συνεχής τ.μ.)

v. $P(X>3) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{3-\mu}{\sigma}\right) = P(\underset{\underset{N(0,1)}{\sim}}{Z} > 3-3/2) = P(Z>0) = 1-\Phi(0) = 1/2$

vi. $P(X>0) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{0-\mu}{\sigma}\right) = P(\underset{\underset{N(0,1)}{\sim}}{Z} - 0-3/2) = P(Z>-1.5) =$

$= 1-\Phi(-1.5) = 1-(1-\Phi(1.5)) = \Phi(1.5) = 0.9132$

vii. $P(|X-3|>4) = P(X-3>4$ ή $3-X>4)$

$= P(X>7$ ή $X<-1)$

$= P(X>7) + P(X<-1)$

$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{7-\mu}{\sigma}\right) + P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{-1-\mu}{\sigma}\right)$

$= P(\underset{\underset{N(0,1)}{\sim}}{Z} > 2) + P(Z<-2)$

$= 1-\Phi(2) - \Phi(-2)$

$= 1-\Phi(2) + 1 - \Phi(2)$

$= 2 - 2\Phi(2)$

$= 2 - 2\cdot 0.9772$

$= \ldots$

9. Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα De Moivre, Laplace

1. De Moivre (1733)

$X \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$

Η X προσεγγίζεται από την κανονική $N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$ για $n>30$.

Πιο αυστηρά:

$$\lim_{n\to\infty} P(\underset{\underset{Bin(n,\frac{1}{2})}{\sim}}{S_n} \le x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$ ← προσεγγίζεται από την $P(X \le x)$ $X \sim N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$

2. Laplace (1812)

$X \sim Bin(n,p)$

Η X προσεγγίζεται για μεγάλα n από την $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

10. Άσκηση

Χρόνος ζωής λαμπτήρα ~ Exp

Μέσος χρόνος ζωής λαμπτήρα = 100 ώρες

Πολύφωτο με 6 λαμπτήρες

P (στο τέλος 100 ωρών λειτουργίας του πολύφωτου να υπάρχουν ακριβώς 2 λαμπτήρες που λειτουργούν) = ;

E (# λαμπτήρων που λειτουργούν στο τέλος των 100 ωρών)

Με ενδιαφέρει, δηλ.

$p = P$(στο τέλος των 100 ωρών να λειτ. 1 λαμπτήρας)

$= P(X > 100) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{100}\cdot 100} = e^{-1}$

X = χρόνος ζωής λαμπτήρα σε ώρες $\sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$

Y = # λαμπτήρων που λειτουργούν απ' το πολύφωτο στο τέλος των 100 ωρών $\sim Bin(6, \underbrace{e^{-1}}_{p})$

άρα ζητούμενη πιθανότητα $= \binom{6}{2}(e^{-1})^2(1-e^{-1})^4$

και ζητ. μέση τιμή $= np = 6 \cdot e^{-1}$

20/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 23

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές - Ασκήσεις

χρήσιμος τρόπος γραφής

1. Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} cx(3-x) &, 0 \le x \le 3 \\ 0 &, \text{διαφορ.} \end{cases} = cx(3-x)\,1_{[0,3]}(x)$

(i) $c = ;$

(ii) $F_X(x) = ;$

(iii) $E[X] = ;$

(iv) $Var[X] = ;$

(v) $P(X \ge 1 \mid X \in [-1,2]) = ;$

(vi) $P(X \ge 1 \mid X \in [0,4]) = ;$

Λύση:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1 \Rightarrow \int_0^3 cx(3-x)\,dx = 1 \Rightarrow c\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 1$

$\Rightarrow c \cdot \frac{27}{6} = 1 \Rightarrow c = 6/27 \Rightarrow c = 2/9$

(ii) $x<0 \;:\; F_X(x) = 0$

$x > 3 \;:\; F_X(x) = 1$

$0 \le x \le 3 \;:\; F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du = \int_0^x \frac{2}{9} u(3-u)\,du \Rightarrow F_X(x) = \frac{2}{9}\left[\frac{3u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right]_{u=0}^{x}$

$\Rightarrow F_X(x) = \frac{2}{9}\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]$

άρα

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 &, x<0 \\ \frac{2}{9}\left(3x^2/2 - x^3/3\right) &, 0 \le x \le 3 \\ 1 &, x > 3 \end{cases}$$

(iii) $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^3 \frac{2}{9} x^2(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\left[x^3 - \frac{3x^4}{4}\right]_{x=0}^{3} = \frac{2}{\cancel{9}}\left[\overset{3}{\cancel{27}} - \frac{\overset{9}{\cancel{81}}}{4}\right] =$

$= 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

(iv) $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$

$$Var[X] = \int_0^3 \frac{2}{9} x^3(3-x)dx - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{3} - \frac{9}{4} = \dots$$

(v) $$P(X \geq 1 \mid X \in [-1,2]) = \frac{P(X \geq 1,\ X \in [-1,2])}{P(X \in [-1,2])} = \frac{P(1 \leq X \leq 2)}{P(-1 \leq X \leq 2)}$$

$$= \frac{F_X(2) - F_X(1)}{F_X(2) - F_X(-1)} = \frac{\frac{2}{9}\left[3\cdot 4/2 - 8/3 - 3/2 + 1/3\right]}{2/9\,(3\cdot 4/2 - 8/3) - 0} = \dots$$

$$P(X \geq 1 \mid X \in [0,4]) = \frac{P(X \in [1,4])}{P(X \in [0,4])} = \frac{\int_1^4 f_X(x)dx}{\int_0^4 f_X(x)dx} = \frac{\int_1^3 \frac{2}{9}x(3-x)dx}{\underbrace{\int_0^3 \frac{2}{9}x(3-x)dx}_{1}}$$

$$= \dots$$

2. Άσκηση

Βενζινάδικο γεμίζει 1 φορά τη βδομάδα

X = όγκος πωλήσεων σε 1 βδομάδα

X συνεχής τ.μ με σ.π.π $f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{διαφορ} \end{cases}$, X σε χιλ lt

$\underbrace{\text{Χωρητικότητα δεξαμενής}}_{c}$, πιθ εξάντλησης αποθεμάτων $= \frac{1}{100}$

Λύση:

$$P(X > c) = \frac{1}{100}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 5(1-u)^4 du, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1-x)^5, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

άρα

$$P(X > c) = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 1 - F_X(c) = \frac{1}{100} \Leftrightarrow F_X(c) = \frac{99}{100} \Leftrightarrow 1 - (1-c)^5 = \frac{99}{100}$$

$$\Leftrightarrow (1-c)^5 = \frac{1}{100} \Leftrightarrow c = 1 - \sqrt[5]{\frac{1}{100}}$$

3. Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{c}{x^r} 1_{\{x \geq 1\}} = \begin{cases} c/x^r & , x \geq 1 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

(i) Επιτρεπτές τιμές του r ;

(ii) $c = c(r) = ;$

(iii) $r = ;$ ώστε $E[X] < \infty$

(iv) για δεδομένο $r > 1$, για ποιες τιμές $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E[X^a] < \infty$;

Λύση:

(i) r επιτρεπτή τιμή $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = 1$

$$\int \frac{1}{x^r}\,dx = \begin{cases} \ln x & , r = 1 \\ \frac{x^{-r+1}}{-r+1} & , r \neq 1 \end{cases}$$

Πρέπει $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx < \infty \Leftrightarrow r > 1$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}dx = \begin{cases} \infty & , r \leq 1 \\ 1/1-r & , r > 1 \end{cases}$$

(ii) $r > 1$ $\quad c\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = 1 \Leftrightarrow c = 1 - r$

άρα $f_X(x) = \frac{1-r}{x^2} 1_{\{x \geq 1\}}$

(iii) Πρέπει $r > 1$ και $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1-r}{x^{r-1}}\,dx < \infty \Leftrightarrow r - 1 > 1 \Leftrightarrow r > 2$

(iv) $E[X^a] < \infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} x^a \frac{1-r}{x^r}\,dx < \infty \Leftrightarrow (1-r)\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{r-a}}\,dx$

$\Leftrightarrow r - a > 1 \Leftrightarrow a < r - 1$

4. Άσκηση

X ομοιόμορφη τ.μ. $X \sim \text{Uniform}((a,b)) = U((a,b))$

σ.π.π.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$\mu = E[X] = 5 = \frac{a+b}{2} = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx$

$\sigma^2 = Var[X] = 3 = (b-a)^2/12 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx$

$a = ;$ $\quad b = ;$ $\quad P(|X-5| > 2) = ;$

Λύση:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 5 \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 10 \\ b-a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$P(|x-5|>2) = P(\underbrace{x-5>2 \text{ ή } x-5<-2}_{\text{ασυμβίβαστα}}) = P(x-5>2) + P(x-5<-2)$$

$$= P(x>7) + P(x<3) = \int_7^8 \frac{1}{6}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{3}$$

5. Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = \frac{1}{2x^2} 1_{\{|x| \geq 1\}}$

$Y = X^2$

σ.π.π. $f_Y(y) = ;$

Λύση:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2x^2 & , x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$$

$Y = X^2 \qquad x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

οπότε $Y = X^2 \in [1, \infty)$

άρα,

$$f_Y(y) = 0 \quad , y \in (-\infty, 1)$$

Για $y \geq 1$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Άρα,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{y})^2} = \frac{1}{2y^{3/2}} \quad , y \in [1, +\infty)$$

Τελικά,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2y^{3/2} & , y \in [1, +\infty) \\ 0 & , y \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

6. Άσκηση

X συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}\{x>0\} = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

$(X \sim Exp(1))$

$$Y = \begin{cases} X, & X \le 1 \\ 1/X, & X>1 \end{cases}$$

σ.π.π $f_Y(y) = ;$

Λύση:

(πρέπει να εξηγήσω γιατί)

Η Y παίρνει τιμές στο $(0,1]$

$y \in (0,1]$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y \le y, X \le 1) + P(Y \le y, X > 1)$

$(P(A) = P(AB) + P(AB^c))$

Εναλλακτικά: $P(Y \le y) = P(X \le 1) P(Y \le y \mid X \le 1) + P(X>1) P(Y \le y \mid X > 1)$

$(P(A) = P(B) P(A|B) + P(B^c) P(A|B^c))$

$= P(X \le y, X \le 1) + P(\frac{1}{X} \le y, X < 1)$

$= P(X \le y) + P(X \ge 1/y)$

$y \in (0,1]$

$F_Y(y) = F_X(y) + 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$

$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(y) + f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} = e^{-y} + \frac{1}{y^2} e^{-1/y}$

Άρα,

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} + \frac{1}{y^2} e^{-1/y}, & y \in (0,1] \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

7. Άσκηση

$X \sim N(0,1) \overset{\text{νδο}}{\Rightarrow} X^2 \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\Updownarrow$

Όταν

$X \sim N(0,1)$

σ.π.π. $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}$

$Y \sim Gamma(\alpha, \lambda)$

σ.π.π $f_Y(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}, \quad y>0$

Λύση:

X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$

$Y = X^2$ παίρνει τιμές στο $[0, +\infty)$

$f_Y(y) = 0 \ , \ y<0$

$y \in [0, +\infty)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\Rightarrow f_Y(y) = \phi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \ e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \ \frac{1}{2\sqrt{y}} = c \cdot y^{-1/2} \ e^{-\frac{1}{2}y} \rightarrow$ σ.π.π. Gamma

$\lambda = 1/2$

$a - 1 = -1/2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Άρα, $Y \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\qquad\qquad\qquad\quad a \quad \lambda$