Λύση:

X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$

$Y = X^2$ παίρνει τιμές στο $[0, +\infty)$

$f_Y(y) = 0 \ , \ y<0$

$y \in [0,+\infty)$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\Rightarrow f_Y(y) = \phi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \phi(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \, e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = c \cdot y^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}y}$ → σ.π.π. Gamma

$\lambda = 1/2$

$a-1 = -1/2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Άρα, $Y \sim Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad a \quad \lambda$

22/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 24

Πολυδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

1. Ορισμός

δειγμ. χώρος

$(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$

λέγεται 2-διάστατη τ.μ. αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ $\{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} \in \mathcal{A}$

οικογ. ενδεχ.

Διαισθητικά, (X,Y) ← ζεύγος αριθμ. χαρακτηριστικών ενός παρ. τύχης.

Ανάλογα, έχουμε n-διάστατες τ.μ. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

2. Συνάρτηση Κατανομής

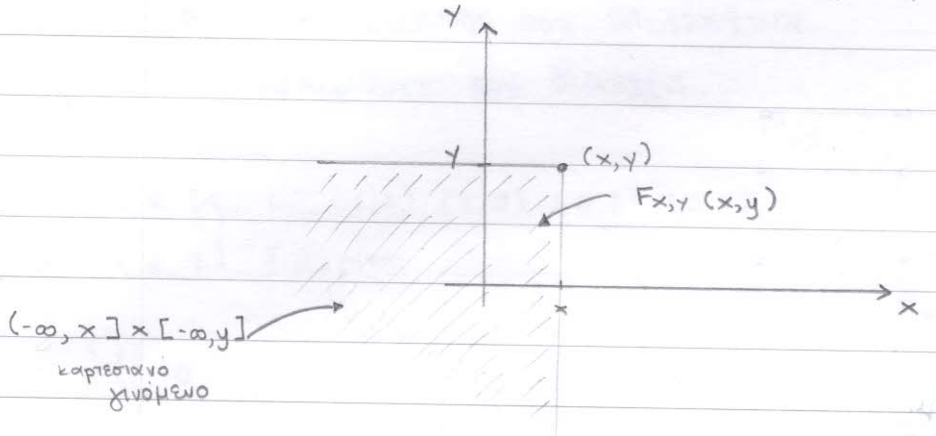
(X,Y) τ.μ.

σ.κ. $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

από κοινού

περιθώρια σ.κ της X: $F_X(x) = P(X \leq x)$

" της Y: $F_Y(y) = P(Y \leq y)$



Ιδιότητες:

1. $\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$

2. $\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

3. $\lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$

4. $\lim_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

5. $\lim_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$

6. $F_{X,Y}$ ↑ (αύξουσα) ως προς x και ως προς y.

7. $F_{X,Y}$ δεξιά συνεχής ως προς x, y

$\lim_{x \to x_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x_0, y)$

$\lim_{y \to y_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x, y_0)$

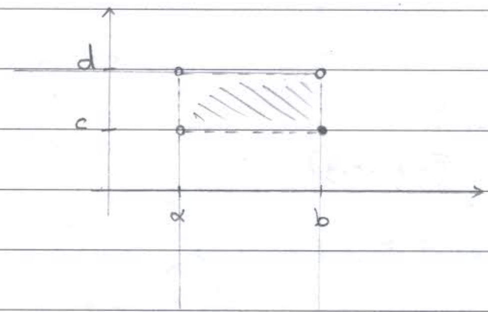
8. $F_{X,Y}(x,y)$ έχει αριστερά όρια

$\lim_{x \to x_0^-} F_{X,Y}(x,y) = P(X < x_0, Y \leq y)$

$\lim_{y \to y_0^-} F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y < y_0)$

9. $P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) = F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$

(βλ. σχήμα) →



3. Διακριτές 2-διάστατες τ.μ.

(X,Y) τ.μ. διακριτή $\Leftrightarrow \exists\ A = \{(x_0,y_0),(x_1,y_1)\dots\}$ $\quad P((X,Y)\in A) = 1$

$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x,\ Y=y)$

από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

Ιδιότητες:

1. $P_{X,Y}(x,y) \geq 0$
2. $\sum_x \sum_y P_{X,Y}(x,y) = 1$

$P_X(x) = P(X=x)$ περιθώρια σ.π της X

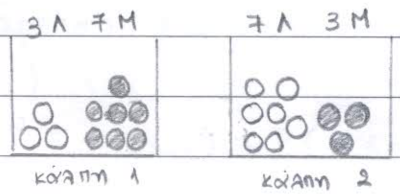
$P_Y(y) = P(Y=y)$ περιθώρια σ.π της Y

$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$

$P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)$

4. Παράδειγμα

Πείραμα τύχης



1ο στάδιο: Επιλέγω κάλπη στην τύχη

2ο » : Διαλέγω 2 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση

X = αριθμός της κάλπης που επιλέχθηκε.
Y = # Λ σφαιριδίων που διάλεξα.

$P((X,Y) \in \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}) = 1$
άρα (X,Y) διακριτή

$X \backslash Y$	0	1	2	$P_X(x)$
1	7/30 *	7/30 ***	1/30 **	1/2
2	1/30 ♥	7/30 ♥♥	7/30 ♥♥♥	1/2
$P_Y(y)$	8/30	14/30	8/30	1

$P_{X,Y}(x,y)$

* $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{7}{30}$

** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{30}$

*** επειδή η πρώτη γραμμή αθροίζει στο $\frac{1}{2}$
ή αλλιώς, $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{7}{30}$

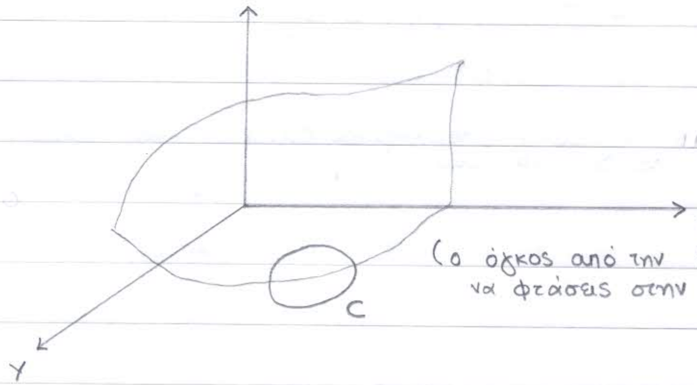
διαλέγω πρώτα Λ ή πρώτα Μ

♥ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{30}$

♥♥, ♥♥♥ $\frac{7}{30}$ (γιατί το πρόβλημα είναι συμμετρικό)

5. Συνεχείς 2-διάστατες τ.μ.

(X,Y) τ.μ. συνεχής με από κοινού σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
αν $P((X,Y)\in C) = \int_C\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$



(ο όγκος από την βάση μέχρι να φτάσεις στην επιφάνεια).

Ιδιότητες:

1. $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) = 1$

3. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

περιθώρια σ.π.π της X

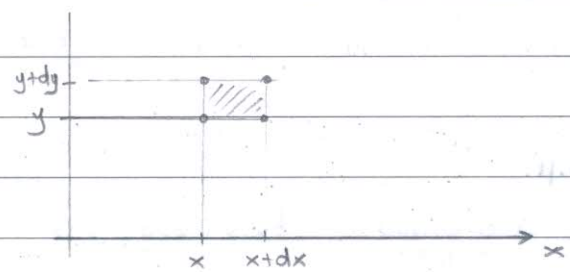
$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

περιθώρια σ.π.π της Y

4. $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,u)\,du\,dt$

5. $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$

6. $f_{X,Y}(x,y) = \lim\limits_{\substack{dx \to 0 \\ dy \to 0}} \dfrac{P(x < X \leq x+dx,\ y < Y \leq y+dy)}{dx\,dy}$



Για μικρά dx, dy

$P(x < X \leq x+dx,\ y \leq Y \leq y+dy) \simeq f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

7. $P(X=x, Y=y) = 0$ (γιατί ουσιαστικά ολοκληρώνω πάνω σε ένα σημείο που δεν έχει όγκο)

$P(X=x, Y \in A) = 0$

$P(X \in A, Y=y) = 0$

22/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 24

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

6. Παράδειγμα:

(X,Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c \cdot e^{-x} e^{-2y} & , x,y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) $c =$;

(ii) $f_X(x) =$;

(iii) $f_Y(y) =$;

(iv) $P(X>1, Y<1) =$;

(v) $P(X<1) =$;

(vi) $P(X<Y) =$; (το αφήνουμε προς το παρόν

Λύση:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty}\underbrace{\int_0^{\infty} c e^{-x} e^{-2y}\,dy}_{= \frac{e^{-2y}}{-2}\Big|_{y=0}^{\infty} = \frac{1}{2}}dx = 1 \Rightarrow c\int_0^{\infty} e^{-x}\int_0^{\infty} e^{-2y}\,dy\,dx = 1$

$\Rightarrow \frac{c}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$

άρα, $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} e^{-2y} & , x,y>0 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(ii) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} 2e^{-x} e^{-2y}\,dy = e^{-x}\overbrace{\int_0^{\infty} 2e^{-2y}\,dx}^{1 \text{ σ.π.π. της } exp(2)} = e^{-x}$

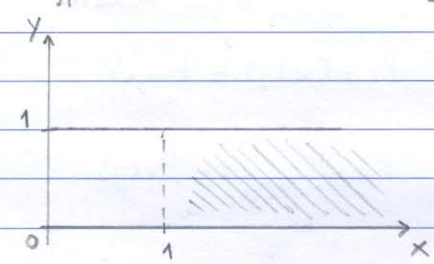
άρα $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x>0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$

(iii) Όμοια

(iv) $P(X>1, Y<1) = \int_1^{\infty}\int_0^1 2e^{-x} e^{-2y}\,dy\,dx = \int_1^{\infty} e^{-x}\int_0^1 2e^{-2y}\,dy = 2\int_1^{\infty} e^{-x}\int_0^1 e^{-2y}\,dy\,dx$

$= 2\int_1^{\infty} e^{-x}\,\frac{e^{-2y}}{-2}\Big|_{y=0}^{1}\,dx = \cancel{2}\int_1^{\infty} e^{-x}\,\frac{e^{-2}+1}{\cancel{2}}\,dx$

$= (1-e^{-2})\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = (1-e^{-2})\,\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_{x=1}^{\infty} = (1-e^{-2})\,e^{-1}$



(v) $P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\,dx = 1-e^{-1}$

(vi) (αργότερα)

24/11/2017 ΜΑΘΗΜΑ 25

Δεσμευμένες Συναρτήσεις Πιθανότητας
Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας
Συναρτήσεις Κατανομής
Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

1. Ορισμός

(X,Y) 2-διάστατη διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

Περιθώρια σ.π της Y $P_Y(y) = P(Y=y)$

Ορίζουμε για κάθε y με $P_Y(y)>0$ τη δεσμευμένη σ.π της X δοθέντος $Y=y$.

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$$

Για κάθε y $P_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει τις ιδιότητες της σ.π.

1. $P_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad \forall x$
2. $\sum_x P_{X|Y}(x,y) = 1$ (αν αθροίσω ως προς y δεν κάνει 1, ούτε είναι συμμετρικό)

X, Y ανεξάρτητες $\overset{ορσ}{\iff} \forall A,B \quad P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

$\iff \forall x,y \quad P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)\cdot P_Y(y)$ (μας θυμίζει $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ αν A,B ανεξάρτητα)

Απόδειξη:

$\Rightarrow$) $A = \{x\}$, $B = \{y\}$

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$
$$= P(X=x)\cdot P(Y=y) = P_X(x)\cdot P_Y(y)$$

$\Leftarrow$) $P(X\in A, Y\in B) = \sum_{(x,y)\in A\times B} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P_{X,Y}(x,y) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P_X(x)\cdot P_Y(y)$

$$= \sum_{x\in A} P_X(x) \underbrace{\sum_{y\in B} P_Y(y)}_{P(Y\in B)} = P(Y\in B) \underbrace{\sum_{x\in A} P_X(x)}_{P(X\in A)} = P(Y\in B)\cdot P(X\in A)$$

■

$\iff \forall x,y \quad P_Y(y)>0 \quad P_{X|Y}(x|y) = P_X(x)$

$\iff \forall x,y \quad P_X(x)>0 \quad P_{Y|X}(y|x) = P_Y(y)$

2. Ορισμός

(X,Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

Ορίζουμε δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της X δεδομένου ότι $Y=y$ για $f_Y(y)>0$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Για κάθε y η $f_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει τις ιδιότητες της σ.π.π.

1. $f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \ \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x,y)\,dx = 1$

5. Παραδείγματα

1. (X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = \frac{1}{\pi} \cdot 1\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$
   X, Y ανεξάρτητες;

$$\downarrow$$
$$1\{x\in[-1,1]\}\cdot 1\{y\in[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]\}$$

   <u>ΟΧΙ</u>

2. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c'xy & , 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = c'xy\, 1\{x\in[0,1]\} \cdot 1\{y\in[x,1]\}$
   ↳ δηλ. το y εξαρτάται από το x

   X, Y ανεξάρτητες;

   <u>ΟΧΙ</u>

3. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & , 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = \overbrace{cx\, 1\{x\in[0,1]\}}^{f(x)}\ \underbrace{y\, 1\{y\in[0,1]\}}_{g(x)}$

   X, Y ανεξάρτητες;

   <u>ΝΑΙ</u>

Γενικά, αν έχω μια σ.π.π. ή σ.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} >0 & , \text{στο } A \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Για να υπάρχει περίπτωση X, Y ανεξάρτητες πρέπει το A να γράφεται σαν καρτεσιανό γινόμενο 2 συνόλων $A = A_x \times A_y$.
(αναγκαίο αλλά όχι επαρκές για την ανεξαρτησία).

6. Παράδειγμα:

(X,Y) συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & , 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) $c = ;$
(ii) $f_X(x) = ;$
(iii) $f_Y(y) = ;$
(iv) $f_{X|Y}(x|y) = ;$
(v) $f_{Y|X}(y|x) = ;$
(vi) $P(X<Y) = ;$

Λύση:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 cxy\,dy\,dx = 1$

$$\Rightarrow c\int_0^1 x \underbrace{\int_0^1 y\,dy\,dx = 1}_{\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{1}} = 1 \Rightarrow \frac{c}{2}\underbrace{\int_0^1 x\,dx = 1}_{\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{1}} \Rightarrow \frac{c}{4} = 1 \rightarrow c = 4$$

X, Y ανεξάρτητες $\overset{ορσ}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A, B \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A, Y \in B)$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \quad f_Y(y) > 0 \quad f_{X|Y}(x,y) = f_X(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \quad f_X(x) > 0 \quad f_{Y|X}(y,x) = f_Y(y)$

3. Ορισμός

(X,Y) τ.μ. — διακριτή $P_{X,Y}(x,y)$ σ.π.

— τυχαία $f_{X,Y}(x,y)$ σ.π.π.

Η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένου $Y=y$ ορίζεται:

$$F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \sum_{t \le x} P_{X|Y}(t|y), & \text{αν } (X,Y) \text{ διακριτές}, P_Y(y) > 0, x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt, & \text{αν } (X,Y) \text{ συνεχείς}, f_Y(y) > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

[Η ιδέα: $P(X \le x | Y = y)$]

Η σ.κ. $F_{X|Y}(\cdot|y)$ έχει όλες τις ιδιότητες της σ.κ.

Ισχύει ότι:

X, Y ανεξάρτητες $\Longleftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x, y$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \quad F_{X|Y}(x,y) = F_X(x)$

$\Longleftrightarrow \forall x, y \quad F_{Y|X}(y|x) = F_Y(y)$

4. Κριτήριο Ανεξαρτησίας

(X,Y) διακριτές με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

X, Y ανεξάρτητες $\Longleftrightarrow \exists f, g : \quad P_{X,Y}(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \forall x, y$

Απόδειξη:

$\Rightarrow$ $f = P_X$, $g = P_Y$ ✓

$\Leftarrow$ $P_X(x) = \sum_y f(x) \cdot g(y) = f(x) \overbrace{\sum_y g(y)}^{c_1} = c_1 f(x)$

$P_Y(y) = \sum_x f(x) g(y) = g(y) \overbrace{\sum_x f(x)}^{c_2} = c_2 g(y)$

Άρα,

$P_X(x) \cdot P_Y(y) = c_1 f(x) \cdot c_2 g(y) = c_1 c_2 f(x) g(y) = c_1 c_2 P_{X,Y}(x,y)$

Αρκεί νδο $c_1 c_2 = 1$

Πράγματι, $c_1 c_2 = \sum_y g(y) \sum_x f(x) = \sum_y \sum_x \underbrace{g(y) \cdot f(x)}_{P_{X,Y}(x,y)} = 1$ ∎

Ομοίως,

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$

X, Y ανεξάρτητες $\Longleftrightarrow \exists f, g : f_{X,Y}(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \forall x, y$

(ii) $f_X(x)=0$, $x\notin[0,1]$

$x\in[0,1]$ $\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 4x\,dy = 4x\overbrace{\int_0^1 y\,dy}^{1/2} = 2x$

άρα $\quad f_X(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

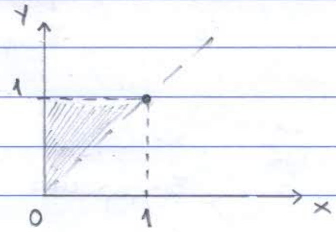
(iii) Ομοια $\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{διαφ}\end{cases}$

(iv) $f_{X|Y}(x,y)$ ορίζεται αν $f_Y(y)>0$ για κάθε y $\Leftrightarrow y\in(0,1]$

τότε $\quad f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}4xy/2y, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}=\begin{cases}2x, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

(Το περιμέναμε αφού είναι ανεξάρτητες)

(v) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2x, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$ όμοια



(vi) $P(X<Y)=\int_0^1\int_x^1 4xy\,dydx$

$=\int_0^1 4x\,\dfrac{y^2}{2}\Big|_{y=x}^{1}\,dx$

$=\int_0^1 4x\,\dfrac{1-x^2}{2}\,dx=\int_0^1(2x-2x^3)\,dx = x^2-\dfrac{x^4}{2}\Big|_{x=0}^{1}=\dfrac{1}{2}$

για τα άκρα κοιτάω ότι πρέπει $0\le x\le y\le 1$
για το εξωτερικό κοιτάω τα άρα έχω $\int_0^1 \ldots dx$
και το y εξαρτάται από το x άρα $\int_0^1\int_x^1 dydx$
Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να γράψουμε
$\int_0^1\int_0^y dydx$

(Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε, επίσης, πως τα δυο χωρία είναι ίσα και μαζί κάνουν 1, άρα το καθένα είναι $\frac{1}{2}$.)

6. Παράδειγμα:

(X,Y) συνεχής με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$

(i) c = ;

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dydx=1 \Rightarrow \int_0^1\int_x^1 cxy\,dydx=1 \Rightarrow c\int_0^1 x\underbrace{\int_x^1 y\,dy}_{y^2/2\,|_{y=x}^{1}}dx=1$

$\Rightarrow c\int_0^1 x\,\dfrac{1-x^2}{2}\,dx=1 \Rightarrow c\int_0^1\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^3}{2}\right)dx=1$

$\Rightarrow c\left[x^2-\dfrac{x^4}{8}\right]_{x=0}^{1} \Rightarrow \ldots\ c=8$

(ii) $f_X(x) = ;$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$x \notin [0,1] \quad f_X(x) = 0$

$x \in [0,1] \quad f_X(x) = \int_x^1 8xy\,dy = 8x\int_x^1 y\,dy = 8x \left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=x}^{1} = 8x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) =$

$= 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2)$

άρα $f_X(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2) & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(iii) $f_Y(y) = \ldots = \begin{cases} 4y^3 & , y \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

(iv) $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x}{y^2} & , x \in (0,y] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$

ορίζεται
για $y \in (0,1]$

(v) $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 2y/1-y^2 & , y \in [x,1] \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

(vi) $P(X<Y) = 1$