Πολυδιάστατες τ.μ.
Κατανομές αθροισμάτων τ.μ.

1. ορισμός

$(X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τ.μ. n-διάστατη (χώρος πιθ)

$\Leftrightarrow \{\omega : X_1(\omega) \le x_1, \dots, X_n(\omega) \le x_n\} \in \mathcal{A}$ ← οικογ. ενδεχομένων

Ορίζονται όμοια με την $n=2$

από κοινού σ.π. $P_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$

από κοινού σ.κ. $F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$

από κοινού σ.π.π. $f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$

2. Κατανομή αθροίσματος διακριτών τ.μ.

(X,Y) 2-διάστατη διακριτή τ.μ. με σ.π. $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

$Z = X+Y \quad P_Z(z) = P(Z=z) = \;;$

$$P_Z(z) = P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum_x P(X+Y=z, X=x)$$

$$= \sum_x P(X=x, Y=z-x) = \sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$$

Ομοίως,

$$P_Z(z) = \sum_y P_{X,Y}(z-y, y)$$

Αν X,Y ανεξάρτητες:

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$$

$$= \sum_y P_X(z-y) \cdot P_Y(y)$$ ← συνελίξεις

3. Κατανομή αθροίσματος συνεχών τ.μ.

(X,Y) 2-διάστατη συνεχής τμ με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$, $Z = X+Y$

τότε,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(y, z-y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\, dy$$

Αν X,Y ανεξάρτητες:

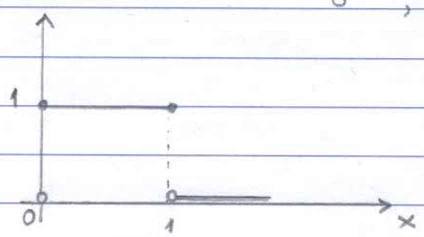
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-y)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) \cdot f_Y(y)\, dy$$

συνελίξεις

4. Παράδειγμα

X, Y ανεξάρτητες Uniform ([0,1])

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$Z = X + Y$

Λύση:

$f_Z(z) = 0 \quad , z \notin [0,2]$

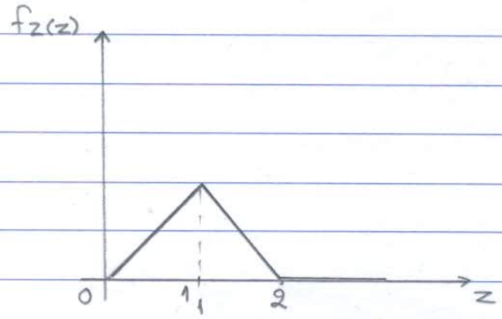
$z \in [0,2]$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int_{\max(0,z-1)}^{\min(1,z)} dx = \min(1,z) - \max(0,z-1)$$

πρέπει $0 \le x \le 1$, $0 \le z-x \le 1$ $\Leftrightarrow$ $z-1 \le x \le z$

άρα,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \min(1,z) - \max(0,z-1) & , 0 \le z \le 2 \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} z & , 0 \le z \le 1 \\ 1-(z-1) = 2-z & , 1 \le z \le 2 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$$



5. Παράδειγμα

X, Y ανεξάρτητες

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$Y \sim \text{Poisson}(\mu)$

$P_X(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \quad , x = 0,1,2,\dots$

$P_Y(y) = e^{-\mu} \dfrac{\mu^x}{x!} \quad , y = 0,1,2,\dots$

$Z = X + Y \quad , \quad P_Z(z) = ;$

Λύση:

Η Z παίρνει τιμές $0, 1, 2, \dots$

Για $z = 0, 1, 2, \dots$

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$$

θέλω:
$x \geq 0$
$z - x \geq 0$
$x, z-x$ ακέραια

$$= \sum_{x=0}^{z} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \, e^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x \mu^{z-x}}{x!(z-x)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \underbrace{\sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \lambda^x \mu^{z-x}}_{(\lambda+\mu)^z}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα,

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ Y \sim \text{Poisson}(\mu) \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \Rightarrow X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda+\mu)$$

$P_{X|Z}(x|z) = ;$

Αυτή η δεσμευμένη πιθ. ορίζεται για z $P_Z(z) > 0 \Leftrightarrow z \in \{0, 1, \dots\}$

Είναι:

$$P_{X|Z}(x|z) = \frac{P_{X,Z}(x,z)}{P_Z(z)} = \frac{P(X=x, Z=z)}{P(Z=z)} = \frac{P(X=x, Y=z-x)}{P(Z=z)}$$

$$\underset{\text{ανεξάρτ}}{\overset{X,Y}{=}} \frac{P(X=x) \cdot P(Y=z-x)}{P(Z=z)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^x}{x!} \cancel{e^{-\mu}} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Αποδ:

$$(X \mid X+Y=z) \sim \text{Bin}\left(z, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

6. Παράδειγμα

X, Y ανεξ $\sim \text{Exp}(\lambda)$, σ.π.π. $f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

$Z = X + Y$

$f_Z(z) = ;$, $f_{X|Z}(x|z) = ;$

Λύση:

Για $z \le 0$, $f_Z(z) = 0$

Για $z > 0$, $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} \int_0^z f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

$x>0$
$z-x>0$

$$= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(z-x)}\, dx$$

$$= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}\, dx$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

$$\Rightarrow X+Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$$

(Γενικά, σ.π.π. Gamma(a,λ) : $\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$)

Η $f_{X|Z}(x|z)$ ορίζεται όταν $f_Z(z) > 0$, δηλ. όταν $z>0$.

Τότε,

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{f_{X,Y}(x, z-x)}{f_Z(z)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(z-x)}{f_Z(z)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}}{\lambda^2 z e^{-\lambda z}}, & 0<x<z \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & 0<x<z \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$$

άρα,

$$(X \mid X+Y = z) \sim \text{Uniform}((0,z))$$

7. Παράδειγμα

$X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$

$Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$

X, Y ανεξ

$Z = X+Y$

$Z \sim$;

σ.π.π. $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}}$

$f_Y(y) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-\lambda y} 1_{\{y>0\}}$

Για $z>0$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

$$= \int_0^z \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (z-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(z-x)}\, dx$$

$$= \overbrace{\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}}^{=c} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha-1} (z-x)^{\beta-1} \, dx$$

$$\overset{u=\frac{x}{z}}{=} c \cdot e^{-\lambda z} \int_0^1 (uz)^{\alpha-1} (z-u)^{\beta-1} \, z \, du$$

$$= c \cdot e^{-\lambda z} z^{\alpha+\beta-1} \underbrace{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} \, du}_{\text{ανεξάρτητο του } z}$$

$$= c' \cdot z^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-\lambda z}$$

Άρα, η σ.π.π. της Z είναι:

$$f_Z(z) = c' z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z} 1\{z>0\}$$

ενώ της Gamma $(\alpha+\beta, \lambda)$ είναι $\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda z} 1\{z>0\}$

Όμως, το c' καθορίζεται μονοσήμαντα από την $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z) dz = 1$,

οπότε αναγκαστικά είναι το $\frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Άρα,

$$X+Y \sim \text{Gamma}(\alpha+\beta, \lambda)$$

8. Αναγεννητικές Ιδιότητες

1. $X \sim Bin(n,p)$, $Y \sim Bin(m,p)$, X,Y ανεξ $\Rightarrow X+Y \sim Bin(n+m, p)$

2. $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, X,Y ανεξ $\Rightarrow X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$

3. $X \sim NegBin(n,p)$, $Y \sim NegBin(m,p)$, X,Y ανεξ $\Rightarrow X+Y \sim NegBin(n+m, p)$

4. $X \sim Geom(p)$, $Y \sim Geom(p)$, X,Y ανεξ $\Rightarrow X+Y \sim NegBin(2, p)$

5. $X \sim Gamma(a, \lambda)$
$Y \sim Gamma(\beta, \lambda)$ $\Rightarrow$ $X+Y \sim Gamma(a+\beta, \lambda)$
X, Y ανεξ

6. $X \sim Exp(\lambda)$
$Y \sim Exp(\lambda)$ $\Rightarrow$ $X+Y \sim Gamma(2, \lambda)$
X, Y ανεξ

7. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\Rightarrow$ $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$
X, Y ανεξ

Μέση Τιμή
Διασπορά
Συνδιακύμανση
Ιδιότητες

1. Ορισμός

X τ.μ , $E[X] = \sum_x x P_X(x)$ (διακριτές)

ή $\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ (συνεχείς)

$P_X(x)$ σ.π (x διακριτή)
$f_X(x)$ σ.ππ (x συνεχής)

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

(X, Y) 2-διάστατη τ.μ.

Συνδιακύμανση των X, Y : $Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

2. Διαισθήσεις

$E[X]$: Μέτρο θέσης της X (γύρω από ποιον αριθμό παίρνει τιμές η X)

$Var[X]$: Μέτρο μεταβλητότητας της X (πόσο κοντά στη μέση τιμή της παίρνει τιμές η X)

$Cov[X, Y]$: Μέτρο συσχέτισης των X, Y ($>0 \sim X, Y$ θετική συσχέτιση
$<0 \to X, Y$ αρνητική συσχέτιση)

3. Ιδιότητες $E[X]$

1. $E[aX + \beta] = aE[X] + \beta$
2. $E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_X(x) & , x \text{ διακριτή με σ.π. } P_X(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) & , x \text{ συνεχής με σ.π.π. } f_X(x) \end{cases}$
3. $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$
4. $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$
5. $E[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) P_{X,Y}(x, y) & , (X, Y) \text{ διακριτή με σ.π. } P_{X,Y}(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dy dx & , (X, Y) \text{ συν με σ.π.π } f_{X,Y}(x, y) \end{cases}$

αφηρ. στατιστικού

6. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Γενίκευση: $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

7. X, Y ανεξάρτητες $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$

Γενίκευση: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ $\Rightarrow E[\underbrace{X_1 X_2 \ldots X_n}_{\prod_{i=1}^{n} X_i}] = \underbrace{E[X_1] \ldots E[X_n]}_{\prod_{i=1}^{n} E[X_i]}$

8. A ενδεχόμενο, 1_A τμ (δείκτρια του A)

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Τότε, $P(A) = E[1_A]$.

Αποδείξεις:

1., 2. ✓

3. $X \geq 0$ διακριτή

Τότε,

$$E[X] = \sum_x x P_X(x) \overset{P_X(x)=0 \text{ για } x<0}{=} E[X] = \sum_{x \geq 0} x P_X(x) \geq 0$$

4. $$a \leq X \leq b \Rightarrow \left.\begin{matrix} X-a \geq 0 \\ b-X \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{3.}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} E[X-a] \geq 0 \\ E[b-X] \geq 0 \end{matrix}\right\} \overset{1.}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} E[X]-a \geq 0 \\ b-E[X] \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \leq E[X] \leq b$$

5. (X, Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$Z = g(X,Y)$

Τότε,

$$E[(X,Y)] = E[Z] = \sum_z z \cdot \overbrace{P_Z(z)}^{P(Z=z)}$$

Όμως,

$$P_Z(z) = P(Z=z) = \sum_{\substack{(x,y): \\ g(x,y)=z}} P(X=x, Y=y) = \sum_{\substack{(x,y): \\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$$

Άρα,

$$E[g(X,Y)] = \sum_z z \sum_{\substack{(x,y): \\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_z \sum_{\substack{(x,y): \\ g(x,y)=z}} z \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_z \sum_{\substack{(x,y): \\ g(x,y)=z}} g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y g(x,y) P_{X,Y}(x,y).$$

6. $$E[\underbrace{X+Y}_{g(X,Y)}] \overset{5.}{\underset{(X,Y) \text{ διακριτή}}{=}} \sum_x \sum_y (x+y) P_{X,Y}(x,y)$$

$g(x,y) = x+y$

$$= \sum_x \sum_y x \underbrace{P_{X,Y}(x,y)}_{= P_X(x)} + \sum_x \sum_y y \underbrace{P_{X,Y}(x,y)}_{= P_Y(y)}$$

$$= \sum_x x P_X(x) + \sum_y y P_Y(y)$$

$$= E[X] + E[Y]$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται η γενίκευση:

Για $n=1$: $E[\sum_{i=1}^{1} X_i] = E[X_1] = \sum_{i=1}^{1} E[X_i]$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλ.

θδο ισχύει για n.

$$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + X_n\right] \overset{E[X+Y]=E[X]+E[Y]}{=} E\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right] + E[X_n] \overset{\text{επαγωγική υπόθεση}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i] + E[X_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

7. (X,Y) διακριτή με σ.π. $P_{X,Y}(x,y)$

$$\underbrace{E[XY]}_{g(X,Y)} = \sum_x \sum_y xy\, P_{X,Y}(x,y)$$

όπου $g(x,y)=xy$

$$= \sum_x \sum_y xy\, P_X(x) \cdot P_Y(y)$$

X,Y ανεξ

$$= \sum_x x\, P_X(x) \sum_y y\, P(Y=y)$$

$$= E[X] \cdot E[Y]$$

Η γενίκευση με επαγωγή, όμοια με το 6.

8. $E[1_A] = 1 \cdot P(1_A = 1) + 0 \cdot P(\overset{0}{1_A} = 0)$

$= P(A)$

4. Πορίσματα - Παρατηρήσεις

1. $E[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n + b] = a_1 E[X_1] + \ldots + a_n E[X_n] + b$

2. Γενικά, $E[XY] \neq E[X]E[Y]$

πχ (X,Y) διακριτή 2-διάστατη τμ

x \ y	0	1	$P_X(x)$
0	0	1/3	1/3
1	1/2	1/6	2/3
$P_Y(y)$	1/2	1/2	

$E[XY] = 1 \cdot P(XY=1) + 0 \cdot \overset{0}{P}(XY=0)$

$= \frac{1}{6}$

$E[X] = 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot \overset{0}{P}(X=0)$

$= \frac{2}{3}$

$E[Y] = 1 \cdot P(Y=1) + 0 \cdot \overset{0}{P}(Y=0)$

$= \frac{1}{2}$

Εδώ, λοιπόν $E[X] \cdot E[Y] = \frac{2}{6} \neq \frac{1}{6} = E[XY]$

3. $E[XY] = E[X]E[Y] \not\Rightarrow X, Y$ ανεξ

πχ.

$P(X=0) = P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{3}$

$$Y = \begin{cases} 0 & , X \neq 0 \\ 1 & , X = 0 \end{cases}$$

X, Y όχι ανεξ. $(Y = g(X))$

Έχω, όμως

$E[X] = 0$

$E[XY] = 0$ γιατί η XY είναι πάντα 0

Άρα,

$E[XY] = 0 = E[X]E[Y]$

5. Εφαρμογή 1: Το πρόβλημα του ταιριάσματος (Matching Problem)

n άνθρωποι με τα καπέλα τους

Ο καθένας διαλέγει ένα στην τύχη

$X = \#$ αυτών που διαλέγουν το καπέλο τους.

$E[X] = ;$

Λύση:

$$X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$$

$$1_{A_i} = \begin{cases} 1 & , \text{αν ο } i \text{ πήρε το καπέλο του} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Έχω,

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} E[1_{A_i}] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Όμως,

$$P(A_i) = \frac{1}{n}$$

6. Εφαρμογή 2: Το πρόβλημα συλλέκτη κουπονιών (Coupon collector problem)

Κάθε προϊόν φέρει 1 κουπόνι από τα $1, 2, \ldots, n$ με πιθ. $\frac{1}{n}$

$X = \#$ κουπονιών που θα συλλεχθούν μέχρι να έχουμε τουλ. 1 κουπόνι από κάθε είδος.

π.χ. $\underbrace{1, 2, 3, 4}_{\text{κουπόνια}}$

	4	4	4	2	4	2	4	4	2	3	2	4	3	3	2	4	1
Είδη κουπονιών:	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4

πρώτο κουπόνι με το 1ο προϊόν

Δοκιμές Bernoulli με πιθ. $\frac{3}{4}$ ως την 1η επιτυχία

\# Δοκιμών Bernoulli με πιθ. $\frac{2}{4}$ ως την 1η επιτυχία

\# Δοκιμών Bernoulli με πιθ. $1/4$ ως την 1η επιτυχία

Έχω:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

X_i = # κουπονιών που πρέπει να αγοραστούν από τη στιγμή που βρήκα το $(i-1)$-οστό κουπόνι ως τη στιγμή που βρήκα το i-οστό

$$X_1 = 1$$

$$X_i \sim Geom\left(\frac{\overbrace{n-(i-1)}^{\text{τα κουπόνια που λείπουν}}}{n}\right)$$

$$P(X_i = k) = \left(\frac{i-1}{n}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right), \quad k \geq 1$$

$$E[X_i] = \frac{1}{\frac{n-(i-1)}{n}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

οπότε,

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \cdots + \frac{n}{1}$$

$$= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)$$

Για μεγάλα n $\quad E[X] \simeq n \cdot \log n$