$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = n \cdot \frac{m}{N}$$

$$Var[X] = n \cdot Var[I_i] + 2\binom{n}{2} Cov[I_i, I_j]$$

$$= n \frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right) + \cancel{2} \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \frac{m}{N}\left(\frac{m-1}{N-1} - \frac{m}{N}\right)$$

04/12/2017 — ΜΑΘΗΜΑ 28

Ασκήσεις:

1. (X,Y) 2-διάστατη τμ με σ.π.π $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6x^c y &, (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \\ 0 &, \text{διαφορ.} \end{cases}$

Λύση:

(i) $c = ;$

$$\int_{\mathbb{R}}\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\int_0^1 6x^c y\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 6x^c \int_0^1 y\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 6x^c \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \overset{3}{\cancel{6}}x^c \frac{1}{\cancel{2}_1}\,dx = 1 \Rightarrow 3\int_0^1 x^c\,dx = 1$$

$$\Rightarrow 3\,\frac{x^{c+1}}{c+1}\Big|_{x=0}^1 \Rightarrow c+1 = 3 \Rightarrow c = 2$$

(ii) $f_X(x)$, $f_Y(y)$;

$$f_X(x) = \int_0^1 6x^2 y\,dy = 6x^2\int_0^1 y\,dy = 6x^2\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^1 = 3x^2 \, 1_{x\in(0,1)}$$

Όμοια,

$$f_Y(y) = \int_0^1 6x^2 y\,dx = 6y\int_0^1 x^2\,dx = 6y\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^1 = 2y \, 1_{y\in(0,1)}$$

(iii) $P(X<1/3) = ;$, $P(Y>2X)$

$$P(X<1/3) = \int_0^{1/3}\int_0^1 6x^2 y\,dy\,dx = \int_0^{1/3} 6x^2\int_0^1 y\,dy\,dx = \int_0^{1/3} 6x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 dx$$

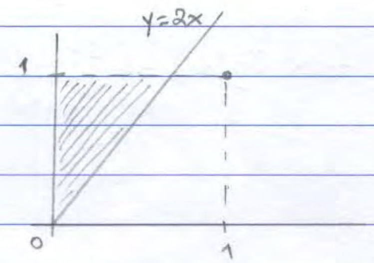
$$= \int_0^{1/3} 3x^2\,dx = \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_{x=0}^{1/3} = \frac{1}{27}$$

$$\underset{X<Y/2}{P(Y>2X)} = \int_0^1\int_0^{Y/2} 6x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 6y\int_0^{Y/2} x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 6y\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{Y/2} = \int_0^1 2y\frac{y^3}{8}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy = \frac{1}{4}\frac{y^5}{5}\Big|_{y=0}^1 = \frac{1}{20}$$

$\int_0^1\int_{2x}^1$ είναι λάθος γιατί τότε $2x<1 \Rightarrow x<1/2$ που με περιορίζει



2. (X,Y) από κοινού συνεχείς τμ με πυκνότητα $f(\cdot,\cdot)$
Να δειχθεί $P(X=Y)=0$ (δεν έχουμε, δηλ, ποτέ σύμπτωση / ισοπαλία των X,Y)
Ιδιαίτερη περίπτωση: X,Y ανεξάρτητες

Λύση:

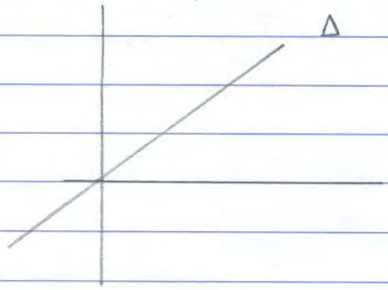
Εστω χωρίο

$$\Delta = \{(x,x),\ x\in\mathbb{R}\}$$

ευθεία που είναι διχοτόμος στα 1°, 3° τεταρτ.

άρα $P(X=Y) = P((X,Y)\in\Delta) = \int_\Delta\int f_{X,Y}(x,y) = 0$

γιατί είναι ο όγκος πάνω σε μία ευθεία



X,Y ανεξ σημαίνει ότι μπορώ να βρω h,g
με $f(x,y) = h(x)\cdot g(x)$
πχ $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_x^x h(x)g(y)\,dy}_{=0}dx = 0$

3. (X,Y) 2-διάστατη με σ.π.π $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/x & , 0<y<x<1 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

(i) Να δειχθεί ότι πράγματι η f είναι συν. πυκνότητας.

Πρέπει:

$$\int_{\mathbb{R}}\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^x \frac{1}{x}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\int_0^x dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, y\Big|_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 1\,dx = x\Big|_{x=0}^{1} = 1$$

(ii) $f_{X|Y}(\cdot|y)$, $f_{Y|X}(\cdot|x)$ για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}$ τα οποία έχουν νόημα.

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}\int_0^x dy = 1 = \mathbb{1}_{x\in(0,1)}$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_{x=y}^{1} = -\log y\,\mathbb{1}_{y\in(0,1)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1/x}{-\log y} = -\frac{1}{x\log y}\cdot\mathbb{1}_{x\in(y,1)}$$

την y την δεσμεύω στο $(0,1)$ άρα προσδιορίζω το x

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{y\in(0,x)}$$ (ομοιόμορφη στο $(0,x)$)

4. (X,Y) τμ με από κοινού σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & , 0<x<y<1 \\ 0, & \text{διαφορ.} \end{cases}$

(i) Είναι X, Y ανεξάρτητες ;

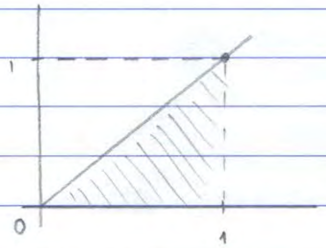
Παρατηρούμε ότι $f(x,y) \neq h(x)\,g(y)$

Χρησιμοποιώ ότι $P(X<Y)=1$

Επιλέγουμε κατάλληλα σύνολα A, B και δείχνουμε $P(X\in A, Y\in B) \neq P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$

$$P\left(X<\frac{2}{3}, Y<\frac{1}{3}\right) = \frac{P(X<2/3, Y<1/3)}{P(X<2/3)\cdot P(Y<\frac{1}{3})} = \frac{P(Y<1/3)}{P(X<2/3)\cdot \cancel{P(Y<1/3)}} = \frac{1}{P(X<2/3)} \neq 1$$

άρα $P\left(X<\frac{2}{3}, Y<\frac{1}{3}\right) \neq P\left(X<\frac{2}{3}\right) P\left(Y<\frac{1}{3}\right)$



(ii) $E(Ye^X) =$;

$$E(Ye^X) = \int_{R^2}\int y e^x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^y 8xy^2 e^x \,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 8y^2 \underbrace{\int_0^y xe^x \,dx}_{*}\,dy = \int_0^1 8y^2 (ye^y - e^y + 1)\,dy$$

$$* \int_0^y xe^x dx = e^x x\Big|_0^y - \int_0^y e^x dx = ye^y - e^x\Big|_0^y = ye^y - e^y + 1$$

$$= 8\int_0^1 y^3 e^y dy - 8\int_0^1 y^2 e^y dy + 8\int_0^1 y^2 dy$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά:

$$\int_0^1 y^3 e^y = y^3 e^y\Big|_0^1 - 3\int_0^1 y^2 e^y dy = e - 3\int_0^1 y^2 e^y dy = e - 3\left(y^2 e^y\Big|_0^1 - 2\underbrace{\int_0^1 ye^y dy}_{=1}\right)$$

$$= e - 3(e-2) = 6 - 2e$$

$$= 8(6-2e) - 8(e-2) + 8\frac{y^2}{3}\Big|_0^1 = -24e + \frac{200}{3}$$

5. X, Y, Z 3 τμ.

$E(X^2)$, $E(Y^2) < \infty$

$Z \sim N(0,1)$

$Cov[X,Y] = 1$

Z ανεξ των X, Y

$Cov[XZ^2, Y+Z] =$;

Λύση:

$$Cov[XZ^2, Y+Z] = Cov[XZ^2, Y] + Cov[XZ^2, Z]$$

$$= E[XZ^2Y] - E[XZ^2]E[Y] + E[XZ^3] - E[XZ^2]E[Z]$$

λόγω ανεξαρτ

$$= E[Z^2]\cdot E[XY] - E[Z^2]E[X]E[Y] + E[X]E[Z^3] - E[XZ^2]E[Z]$$

γιατί και οι Z^2, Z^3 ανεξ των X, Y

$$= \underbrace{E[Z^2]}_{=1}\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right) + E[X]\underbrace{E[Z^3]}_{=0} - E[XZ^2]\underbrace{E[Z]}_{=0}$$

$$= 1 \cdot Cov[X,Y] + 0 + 0$$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

Αφού $Z \sim N(0,1)$

$E[Z]=0$, $Var[Z]=1$

$\Rightarrow E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1$

$\Rightarrow E[Z^2] = 1$

$$\left(E[Z^3] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^3 e^{-z^2/2}\, dz = 0 \right.$$

Ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε χωρίο συμμετρικό γύρω από το 0.)

6. Εξάγω διαδοχικά χωρίς επανάθεση 6 σφαιρίδια από μια κάλπη που περιέχει 50 αριθμημένα σφαιρίδια $1, 2, \dots, 50$.
- X η μικρότερη ένδειξη
- Y η μεγαλύτερη »

Συν. πιθ της (X,Y) = ;

Λύση:

η μεγαλύτερη ενδ

η μικρότερη

διαλέγω αυστηρά όσα είναι ανάμεσα στην μεγαλ. και τη μικροτ. ένδειξη

$$P(X=x, Y=y) = \begin{cases} \dfrac{6\cdot 5\,(y-x-1)_4}{(50)_6}, & y-x \geq 5 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

πλήθος δυνατών

Συνδυακύμανση και συντελεστής (Γραμμικής Συσχέτισης)

1. Ορισμός

(X, Y) τμ

Ορίζουμε συντελεστή (γραμμικής) συσχέτισης των X, Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

2. Παράδειγμα

(X, Y)
X = ύψος σε cm
Y = βάρος σε kg
X' = ύψος σε ft $= aX$ — a: συντελ. μετατροπής μονάδων cm → ft
Y' = βάρος σε lb $= cY$ — c: συντ. μετατρ. μον. kg → lb

$$Cov(X',Y') = Cov(aX, cY) = ac\,Cov(X,Y)$$

Άρα για το ίδιο πείραμα τύχης έχουμε διαφορετική συνδυακύμανση των 2 μεγεθών ανάλογα με τις μονάδες μέτρησης.

$$\rho(X',Y') = \frac{Cov(X',Y')}{\sqrt{Var(X')}\sqrt{Var(Y')}} = \frac{ac\,Cov(X,Y)}{|a|\sqrt{Var[X]}\,|c|\sqrt{Var[Y]}} = \rho(X,Y)$$

Άρα,
1. Ο συντελ. συσχ δεν εξαρτάται από τις μον. μέτρησης
2. Ο ρ είναι αδιάστατος

3. Προσοχή!

$$Cov[aX+b, cY+d] = ac\,Cov[X,Y]$$

Όμως,

$$\rho(aX+b, cY+d) \neq ac\rho(X,Y), \quad \rho(X+Z, Y) \neq \rho(X,Y) + \rho(Z,Y)$$

Ο ρ δεν έχει ιδιότητες γραμμικότητας.

4. Ιδιότητες του ρ

1. $$\rho(aX, bY) = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{αν } ab>0 \\ -\rho(X,Y) & \text{αν } ab<0 \end{cases}$$

2. $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$

3. $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες

4. $\rho(X,Y) = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$, με $a > 0$

5. $\rho(X,Y) = -1 \Leftrightarrow Y = aX + b$, με $a < 0$

} όταν, δηλ. η X με την Y συνδέονται γραμμικά.

Αποδείξεις:

1. $$\rho(aX, bY) = \frac{Cov[aX, bY]}{\sqrt{Var[aX]}\sqrt{Var[bY]}} = \frac{ab\ Cov[X,Y]}{|a|\sqrt{Var[X]}\ |b|\sqrt{Var[Y]}} = \frac{ab}{|a||b|}\ \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}}$$

$$= \frac{ab}{|a||b|}\ \rho(X,Y) = \begin{cases} \rho(X,Y) & , ab > 0 \\ -\rho(X,Y) & , ab < 0 \end{cases}$$

2. $\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$, $\sigma_Y = \sqrt{Var[Y]}$

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0 \Leftrightarrow Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) + Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right) + 2\ Cov\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\sigma_X^2}\ Var[X]}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{\sigma_Y^2}\ Var[Y]}_{=1} + \underbrace{\frac{2}{\sigma_X \sigma_Y}\ Cov[X,Y]}_{\rho(X,Y)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\rho(X,Y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \rho(X,Y) \geq -1$$

Ομοίως, $Var\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right] \geq 0 \Leftrightarrow \rho(X,Y) \geq 1$

3. $$\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \Leftrightarrow Cov[X,Y] = 0 \Leftrightarrow X, Y \text{ ασυσχέτιστες}$$

4. $\Rightarrow$ $$\rho(X,Y) = 1 \xRightarrow[\text{του 2.}]{\text{αποδ.}} Var\left[\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right] = 0 \Rightarrow \frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y} = c \text{ , c σταθερά}$$

$$\Rightarrow Y = \underbrace{\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}}_{a>0} X - \underbrace{c\,\sigma_Y}_{=b}$$

$\Leftarrow$

$Y = aX + b$, $a > 0$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X, aX+b]}{\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[aX+b]}} = \frac{a \cdot Cov[X,X]}{|a|\ Var[X]} = 1$$

5. Ομοίως

5. Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$|Cov[X,Y]| \leq \sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}$$

Αποδ:

$|\rho(X,Y)| \leq 1 \Rightarrow \ldots$

Άλλη μορφή:

$$|E[X,Y]| \leq E[X^2]^{1/2}\, E[Y^2]^{1/2}$$

6. Το ρ μετράει γραμμική συσχέτιση, όχι εξάρτηση

$\rho = \pm 1 \Rightarrow$ απόλυτη γραμμική εξάρτηση Y, X, δηλ. $Y = aX + b$

$\rho = 0 \Rightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες

Μπορεί X, Y εξαρτημένες και $\rho(X,Y) = 0$

πχ $X \sim Uniform([-1,1])$, $Y = X^2$

Τότε, X, Y εξαρτημένες αλλά $\rho(X,Y) = 0$.

7. Εφαρμογή: Δειγματικός Μέσος και Δειγματική Διασπορά.

$X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ τμ ανεξ ισόνομες (← ίδια κατανομή δηλ)

και $\underbrace{E[X_i] = \mu, \; Var[X_i] = \sigma^2}_{\text{άγνωστα}}$

Μια λογική εκτίμηση για το μ είναι ο δειγματικός μέσος $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Δυο επιθυμητές ιδιότητες είναι

$\underbrace{E[\bar{X}] = \mu}_{\text{αμεροληψία της } \bar{X}}$, $Var[\bar{X}] \longrightarrow 0$, καθώς $n \to \infty$

Ερώτημα: Υπολογισμός $E[\bar{X}]$, $Var[\bar{X}]$

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} E[X_i]}^{\mu} = \mu$$

$$Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{\text{ανεξ}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \overbrace{Var[X_i]}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0,$$

καθώς $n \to \infty$

Μια λογική εκτίμηση για το σ^2 είναι:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$$

Όμως, το μ άγνωστο.

οπότε, λογική εκτίμηση είναι η $\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}_{S}$

Δυο επιθυμητες ιδιότητες είναι

$$\underbrace{E[S]=\sigma^2}_{\text{αμεροληψία της } S}, \quad Var[S]\to 0, \text{ καθώς } n\to\infty$$

Ερώτημα: Υπολογισμός της $E[S]$

$$E[S]=E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu)+(\mu-\bar{x})\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+2(x_i-\mu)(\mu-\bar{x})+(\mu-\bar{x})^2\right]$$

$\sigma^2=E[(x_i-\mu)^2]$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}E[(x_i-\mu)^2]+2E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(\mu-\bar{x})\right]+nE[(\mu-\bar{x})^2]\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(n\sigma^2+2nE\underbrace{\left[\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n}}_{\bar{x}-\mu}(\mu-\bar{x})\right]}_{-Var[\bar{x}]}+n\,Var[\bar{x}]\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{n}}\left(\cancel{n}\sigma^2-2\cancel{n}\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\cancel{n}\sigma^2}{n}\right)$$

$$=\sigma^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2$$

Άρα,

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}\right]=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

οπότε,

$$\underbrace{E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}\right]}=\sigma^2$$

αυτή είναι η λογική εκτιμήτρια για το σ^2 και λέγεται αμερόληπτη δειγματική διασπορά.

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

1. Ορισμός (για διακριτές)

(X,Y) διακριτή τμ με σπ $P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

δεσμευμένη σ.π της X δεδομ ότι $Y=y$

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} \leftarrow \text{σ.π. ως προς } x \ \forall y$$

Ισχύουν: $P_{X|Y}(x,y) \geq 0 \ \forall x$

$$\sum_x P_{X|Y}(x|y) = 1$$

Δεσμευμένη Μέση Τιμή της X δοθέντος ότι $Y=y$

$$= E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y) = \underbrace{\sum_x x\, P_{X|Y}(x|y)}_{\text{αριθμός που εξαρτάται από το } y}$$

Διαισθητικά:

$E[X|Y=y]$ = καλύτερη πρόβλεψη για τη X δοθείσης της πληροφορίας $Y=y$.

2. Ορισμός (για συνεχείς)

(X,Y) συνεχής τμ με σ.π. $f_{X,Y}(x,y)$

δεσμευμένη σ.π.π της X δεδομ ότι $Y=y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Ισχύουν: $f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \ \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$$

$$E[X|Y=y] = m_{X|Y}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)$$

3. Ιδιότητες

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες της μέσης τιμής (αδεσμ)

πχ. $E[aX+b|Y=y] = a\,E[X|Y=y] + b$

$X \geq 0$, $E[X|Y=y] \geq 0$

$E[X+Z|Y=y] = E[X|Y=y] + E[Z|Y=y]$

κλπ.

4. Ορισμός

Εστω (X,Y) τμ και $m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y]$

Τότε,

η $m_{X|Y}(Y)$ είναι τ.μ., συνάρτηση της Y και λέγεται δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης της Y.

Εναλλακτικά, συμβολίζεται ως $E[X|Y]$

Διαισθητικά:

$E[X|Y]$ = η καλύτερη συνάρτηση της Y που προσεγγίζει τη X.

5. Θεώρημα Διπλής (ή Επαναλαμβανόμενης) Μέσης Τιμής

$$E[\underbrace{E[X|Y]}_{\substack{\text{τ.μ. άρα} \\ \text{μπορώ να πάρω} \\ \text{την μέση τιμή της}}}] = E[m_{X|Y}(Y)] = E[X]$$

Άρα,

$$E[X] = \begin{cases} \sum_y m_{X|Y}(y)\, P_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} m_{X|Y}(y)\, f_Y(y), & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_Y E[X|Y=y]\, P[Y=y], & Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y]\, f_Y(y)\, dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Απόδειξη:

(διακριτή περίπτωση)

$$E[m_{X|Y}(Y)] \overset{\text{τύπος αφηρ. στατ.}}{=} \sum_Y m_{X|Y}(y)\, P_Y(y) \overset{\text{ορισμός δεσμ. μέσης τιμής}}{=} \sum_Y \sum_X x P_{X|Y}(x|y)\, P_Y(y)$$

$$\overset{\text{ορισμός δεσμ. πιθ.}}{=} \sum_Y \sum_X x \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\cancel{P_Y(y)}} \cancel{P_Y(y)}$$

$$= \sum_Y \sum_X x\, P_{X,Y}(x,y)$$

$$\overset{\text{τύπος αφηρ. στατ.}}{=} E[X]$$

6. Εφαρμογή I : Μέση Τιμή Γεωμετρικής

Ανεξ. Bernoulli $Y_1, Y_2, \dots$ με πιθ. επιτυχίας p $\left(\begin{array}{l} P(Y_i = 1) = p \\ P(Y_i = 0) = 1-p \end{array} \right)$

$E[X] = ;$

- 1^{os} τρόπος: (κλασσικός)

$$P_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \quad , x = 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_x x P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x (1-p)^{x-1} p = \dots = \frac{1}{p}$$

- 2^{os} τρόπος: (ΘΔΜΤ)

$$E[X] = \underbrace{P(Y_1 = 0)}_{1-p} \underbrace{E[X | Y_1 = 0]}_{1+E[X]} + \underbrace{P(Y_1 = 1)}_{p} \underbrace{E[X | Y_1 = 1]}_{1}$$

$$\Rightarrow E[X] = (1-p) + (1-p) E[X] + p$$

$$\Rightarrow p E[X] = 1$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{p}$$

7. Εφαρμογή II : Ζάρι - Νόμισμα

Ρίψη ζαριού, Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

Y = Ένδειξη ζαριού

$X = \# K$

$E[X] = ;$

- 1^{os} τρόπος: (κλασσικός)

$$P_X(x) = \sum_Y P_{X,Y}(\underset{\#K}{x}, \underset{\text{ζάρι}}{y}) = \sum_Y \underset{\text{η πιθ. να φέρει το ζάρι } y}{P_Y(y)} P_{X|Y}(x|y) = \sum_{y=x}^{6} \frac{1}{6} \binom{y}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{y-x}$$

$$E[X] = \sum_x x P_X(x) = \dots$$

- 2^{os} τρόπος: (ΘΔΜΤ)

$$E[X] = \sum_{y=1}^{6} E[X | Y = y] \frac{1}{6}$$

Όμως,

$(X | Y = y) \sim Bin(y, 1/2)$

$$\Rightarrow E[X | Y = y] = y \cdot \frac{1}{2} = \frac{y}{2}$$

Άρα,

$$E[X] = \sum_{Y=1}^{6} \frac{Y}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \sum_{Y=1}^{6} Y = \frac{1}{12} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{4}$$

8. Εφαρμογή III : Μονομαχία

Οι A, B μονομαχούν ρίχνοντας εναλλάξ βολές (ανεξ).

Ευστοχία A $= \frac{1}{3}$

Ευστοχία B $= \frac{2}{3}$

Αρχίζει ο A.

$X = \#$ βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος

$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ τα αποτελέσματα των βολών

$$\left.\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= \frac{1}{3} \\ P(Y_i = 0) &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} i \text{ περιττός}$$

$$\left.\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= \frac{2}{3} \\ P(Y_i = 0) &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} i \text{ άρτιος}$$

$$E[X] = P(Y_1 = 0)\, E[X \mid Y_1 = 0] + P(Y_1 = 1)\, E[X \mid Y_1 = 1]$$

$$= \frac{2}{3} E[X \mid Y_1 = 0] + \frac{1}{3} \cdot 1$$

$E[X \mid Y_1 = 0] = 1 + E[X']$, όπου $X' = \#$ βολών μέχρι να χτυπηθεί κάποιος ξεκινώντας απ' τον B.

Όμοια,

$$E[X'] = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{πιθ αστοχίας του B}} (1 + E[X]) + \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{πιθ. ευστοχίας του B.}} \cdot 1$$

Τελικά,

$$E[X] = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}(1 + E[X]) + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} E[X] + \frac{4}{9} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{9} E[X] = \frac{17}{9} \Rightarrow E[X] = \frac{15}{9}$$

9. Εφαρμογή IV: Φυλακισμένος

Επιλέγει πόρτα στην τύχη από τις 1, 2, 3

1 → ελευθερία άμεσα

2 → πίσω στο κελί μετά από 10 μέρες (χωρίς μνήμη)

3 → » » 20 μέρες (»)

$X = \#$ ημερών ως την ελευθερία , $E[X] = ;$

$Y =$ Αριθμός πόρτας στην $1^{η}$ επιλογή.

$$E[X] = \underbrace{P(Y=1)}_{1/3} \overbrace{E[X|Y=1]}^{0} + \underbrace{P(Y=2)}_{1/3} \overbrace{E[X|Y=2]}^{10+E[X]} + \underbrace{P(Y=3)}_{1/3} \overbrace{E[X|Y=3]}^{20+E[X]}$$

άρα,

$$E[X] = \frac{30}{3} + \frac{2}{3} E[X]$$

$$\Rightarrow E[X] = 30$$

11/12/2017 ΜΑΘΗΜΑ 31

Ασκήσεις

1. X_1, X_2 τμ με $Var[X_1] = Var[X_2] = 1$, $Var[X_1 + X_2] = 3$

(i) X_1, X_2 ανεξ;

(ii) Αν είναι γνωστό ότι για κάποια σταθερά c οι τμ $X_1, X_2 - cX_1$ είναι ανεξ, $c = ;$

Για να είναι ανεξ

(i) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$

όμως $3 \neq 1 + 1$

άρα X_1, X_2 όχι ανεξ.

(ii) Πρέπει $Cov(X_1, X_2 - cX_1) = 0$

$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) - c\,Cov(X_1, X_1) = 0$

όμως,

$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$

$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = \frac{1}{2}$

άρα $\frac{1}{2} - c\,1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

2. Επιλέγουμε αριθμό X ομοιόμορφα τυχαία στο σύνολο $\{1,2,\dots,20\}$
Θέτουμε $Y = 21-X$
(i) Ποια η κατανομή της Y;
(ii) Πρόσημο $Cov(X,Y)$;

(i) Το Y παίρνει τιμές στο $A = \{1,\dots,20\}$
$f_Y(k) = 0$, $k \notin A$
$f_Y(k) = P[Y=k] = P[21-X=k] = P[X=21-k] = \frac{1}{20}$, $k \in A$
(ii) $Cov(X,Y) = Cov(X, 21-X) = -Cov(X,X) = -Var(X)$ και επειδή $Var(X)>0$
έχουμε $Cov(X,Y)<0$.

3. Ρίχνω αμερόληπτο ζάρι $n \geq 1$ φορές.
$Z = \#$ φορών που εμφανίζεται το 2.
$W = \#$ » » το 3.
$Cov(Z,W) =$;

$Z_i = \begin{cases} 1 & , i \text{ ρίψη εμφ. το } 2 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$, $W_i = \begin{cases} 1 & , i \text{ ρίψη εμφ. το } 3 \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$

$Cov(Z,W) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i, \sum_{i=1}^{n} W_i\right) = \sum_{i\neq j} \underbrace{Cov(Z_i, W_j)}_{0 \text{ (λόγω ανεξαρτησίας)}} + \sum_i Cov(Z_i, W_i)$

$Cov(Z_i, W_i) = E(\overset{0}{Z_i W_i}) - E(Z_i)E(W_i) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{36}$
$\left(E(Z_iW_i) = \sum z_i w_i P(\quad) = 0 \quad (\text{γιατί αν το } Z_i = 1 \Rightarrow W_i = 0 \text{ και το ανάποδο}) \right)$

άρα $Cov(Z,W) = -\frac{1}{36}$.

4. A, B ενδεχόμενα
1_A, 1_B οι αντίστοιχες δείκτριες συναρτήσεις.
$Cov(1_A, 1_B) =$;

Γενικά για ενδεχόμενο C στο χώρο πιθ $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$1_C : \Omega \to \mathbb{R}$
και
$E(1_C) = 1\cdot P(C) + 0\cdot P(\Omega \setminus C) = P(C)$
άρα, έχουμε:
$Cov(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B)$ (1)
και $1_A 1_B = 1_{A\cap B}$
$\overset{(1)}{\Longrightarrow} Cov(1_A, 1_B) = E(1_{A\cap B}) - E(1_A)E(1_B)$
$= P(A\cap B) - P(A)P(B)$.

5. X_1, X_2 τ.μ. ανεξ και ισόνομες
$X_i \sim \exp$ με μέση τιμή μ.
(i) $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = ;$
(ii) $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = ;$
(iii) X_1+X_2, $2X_1+3X_2$ ανεξ ; (γιατί X_1, X_2 ασυσχ)

(i) $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = 2Cov(X_1,X_1) + 3\overset{0}{\cancel{Cov(X_1,X_2)}} + 2\overset{0}{\cancel{Cov(X_2,X_1)}} + 3Cov(X_2,X_2)$
$= 2Var(X_1) + 3Var(X_2)$
$= 2\mu^2 + 3\mu^2$
$= 5\mu^2$.

(ii) $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \dfrac{Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2)}{\sqrt{Var(X_1+X_2)}\cdot\sqrt{Var(2X_1+3X_2)}}$ (1)

$Var(X_1+X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2\mu^2$.
$Var(2X_1+3X_2) = 4\mu^2 + 9\mu^2 = 13\mu^2$

άρα $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\rho(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) = \dfrac{5\mu^2}{\sqrt{2\mu^2}\cdot\sqrt{13\mu^2}} = \dfrac{5\mu^2}{\sqrt{26}\mu^2} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

(iii) αφού $Cov(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) \neq 0$, όχι ανεξάρτητες.

6. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ και ισόνομες τμ, η καθεμιά με μέση τιμή $E(X_i) = 2$ και $Var(X_i) = 8$, $i = 1, 2, \dots, n$
Να προσδιορίσετε σταθερές $a_n \in \mathbb{R}$ και $\beta_n > 0$, έτσι ώστε $a_n X + \beta_n Y$ να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου $Y = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} X_i$.

$E(a_n X + \beta_n Y) = a_n + \beta_n E(Y)$
$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} E(X_i) = 2\sum_{i=0}^{n} 3^{i-1} = 2\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = 2\cdot\dfrac{1-3^n}{1-3}$
$= 3^n - 1$
$Var(a_n X + \beta_n Y) = \beta_n^2 Var(Y)$
$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} 9^{i-1} Var(X_i) = 8\sum_{i=1}^{n} 9^{i-1} = 8\sum_{i=0}^{n-1} 9^i = \dfrac{1-9^n}{1-9} = 9^n - 1$

άρα έχουμε:
$0 = a_n + \beta_n(3^n - 1)$ (1)
$1 = \beta_n^2(9^n - 1) \overset{\beta_n>0}{\Longleftrightarrow} \beta^n = (9^n-1)^{-1/2}$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} 0 = a_n + (9^n-1)^{-1/2}(3^n - 1)$
$\Rightarrow a_n = -(3^n-1)(9^n-1)^{-1/2}$

7. X_1, X_2 τμ με $Var(X_1) = 3$, $Var(X_2) = 2$

(i) μέγιστη και ελάχιστη τιμή της $Var(X_1 + X_2)$;

(ii) στις 2 ακραίες περιπτώσεις πως σχετίζονται οι X_1, X_2 ;

(i) $Var(X_1 + X_2) = \underset{2}{Var(X_1)} + \underset{3}{Var(X_2)} + 2Cov(X_1, X_2)$

Θυμίζουμε ότι:

$$-1 \leq \rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{VarX_1}\sqrt{VarX_2}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |Cov(X_1, X_2)| \leq \underset{\sqrt{3}}{\sqrt{VarX_1}} \; \underset{\sqrt{2}}{\sqrt{VarX_2}}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{6} \leq Cov(X_1, X_2) \leq \sqrt{6}$$

Άρα, $Var(X_1, X_2) \in [5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}]$.

(ii) Το $5 + 2\sqrt{6}$ είναι για $\rho = 1$, δηλ. $\underset{\alpha > 0}{X_2 = aX_1 + b}$ και $Var(X_2) = a^2 Var(X_1)$

$$\Rightarrow 2 = a^2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

άρα $X_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} X_1 + b$, $b \in \mathbb{R}$

Το $5 - 2\sqrt{6}$ είναι για $\rho = -1$, δηλ. $\underset{\alpha < 0}{X_2 = a' X_1 + b'}$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow a' = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

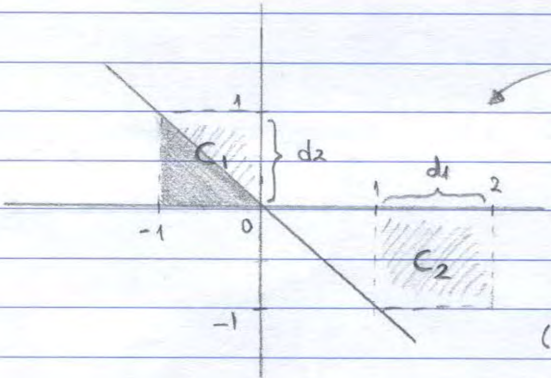
άρα $X_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} X_1 + b'$, $b' \in \mathbb{R}$

8. τμ X, Y με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} -xy & , (x,y) \in (-1,0)\times(0,1) \cup (1,2)\times(-1,0) \\ 0 & , \text{διαφορ.} \end{cases}$

(i) $P(X + Y < 0) =$;

(ii) $E(XY) =$;

(iii) X, Y ανεξ ;



Η τομή των Α,Β είναι τρίγωνο με κορυφές $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,0)$

Άρα, έχουμε:

A: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0\}$

B: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\}$

(i) $$P(X+Y) < 0 = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} -xy \, dy\, dx = \int_{-1}^{0} x \int_{0}^{-x} y \, dy dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{y=0}^{-x} dx = \int_{-1}^{0} x \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{2} dx = \left. \frac{x^4}{8} \right|_{x=-1}^{0} = \frac{1}{8}$$

(ii) $E(XY) = \int_{\mathbb{R}}\int xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

για το δεξί τρίγωνο

$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} xy\,(-xy)\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{-1}^{0} xy\,(-xy)\,dy\,dx$

για το αριστερό τρίγωνο

$= -\int_{-1}^{0} x^2 \int_{0}^{1} y^2\,dy\,dx - \int_{1}^{2} x^2 \int_{-1}^{0} y^2\,dy\,dx$

$= -\int_{-1}^{0} x^2 \frac{1}{3}\,dx - \int_{1}^{2} x^2\left(-\frac{(-1)^3}{3}\right)dx$

$= -\frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^3}{9}\Big|_{1}^{2}$

$= \ldots = -\frac{8}{9}$

(iii) $P(X\in d_1, Y\in d_2) = 0$

Όμως,

$P(X\in d_1)\cdot P(Y\in d_2) \neq 0$

άρα, όχι ανεξ

13/12/2017 ΜΑΘΗΜΑ 32

Πιθανογεννήτριες - Ροπογεννήτριες

1. Ορισμός

$X \geq 0$ ακέραια (διακριτή με τιμές $0,1,2,\ldots$)

Η πιθανογεννήτρια της X:

$$\underset{\uparrow\ \text{αριθμός}}{P_X(z)} = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=n)}_{P_X(n)} z^n, \quad |z| \leq 1$$

2. Ορισμός

X τμ

Η ροπογεννήτρια της X:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P_X(x), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

3. Σύνδεση $P_X(z)$, $M_X(t)$

$M_X(t) = E[e^{tX}] = P_X(e^t)$
$P_X(z) = E[Z^X] = E[e^{\ln z X}] = M_X(\ln z)$

4. Ιδιότητες Πιθανογεννητριών - Ροπογεννητριών

1.	$P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή	$M_X(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow X, Y$ ίδια κατανομή
2.	$P_X(1) = 1$	$M_X(0) = 1$
3.	$P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)]$	$M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$
4.	$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ $S_n = X_1 + \dots + X_n$ $P_{S_n}(z) = P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(z)$	$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$
5.	$X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες N, ακέραια, ≥ 0, ανεξ των X_i $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $\Downarrow$ $P_{S_n}(z) = P_N(P_X(z))$, όπου $P_X(z)$ η πιθανογεννήτρια οποιασδήποτε X_i	$X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες N ακερ, ≥ 0, ανεξ των X_i $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ $\Downarrow$ $M_{S_n}(t) = P_N(M_X(t))$, όπου $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια οποιασδήποτε X_i

Αιτιολογήσεις:

1. $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) z^n \Leftrightarrow P(X=n) = P(Y=n) \quad \forall n$
άρα, X, Y είναι ισόνομες (δηλ. έχουν την ίδια κατανομή).

→ Για τις ροπογεννήτριες χρειάζεται ένα θεώρημα αντιστροφής.

2. $P_X(1) = E[1^X] = 1$, $M_X(0) = E[e^{0X}] = E[1] = 1$

3. $P_X(z) = E[Z^X] \Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} P_X(z) = E\left[\frac{d^n}{dz^n} z^X\right] = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1) z^{X-n}]$

$\Rightarrow P_X^{(n)}(1) = E[X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)]$

$M_X(t) = E[e^{tX}] \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) = E\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{tX}\right]$

$\Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) = E[X^n e^{tX}] \Rightarrow M_X^{(n)}(0) = E[X^n]$

4. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] = E[z^{X_1+X_2+\dots X_n}] = E[z^{X_1} \cdot \dots \cdot z^{X_n}] \overset{\substack{X_1, X_2, \dots, X_n \\ \text{ανεξ}}}{=} E[z^{X_1}]E[z^{X_2}] \cdot \dots \cdot E[z^{X_n}]$$

$$= P_{X_1}(z)\, P_{X_2}(z) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(z)$$

Η απόδειξη για τις ροπογεννήτριες ίδια:

$$M_{S_n}(t) = E[e^{tS_n}] = E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \dots \cdot e^{tX_n}] \overset{\text{ανεξ}}{=} E[e^{tX_1}] \cdot \dots \cdot E[e^{tX_n}]$$

$$= M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(t)$$

5. $$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] \underset{\substack{\text{θεώρημα} \\ \text{διπλής} \\ \text{μέσης τιμής}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{S_N} | N=n] \overset{\substack{N \text{ ανεξ} \\ \text{των } X_i}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[z^{S_n} \cancel{| N=n}]$$

$$\overset{4.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, P_{X_1}(z) \cdot P_{X_2}(z) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(z)$$

$$\overset{X_i \text{ ισόνομες}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot (P_X(z))^n$$

$$= P_N(P_X(z)).$$

Ομοίως, για τη ροπογεννήτρια:

$$M_{S_N}(t) = E[e^{tS_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{tS_N} | N=n] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, E[e^{tS_n} \cancel{| N=n}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\, M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) \cdot (M_X(t))^n$$

$$= P_N(M_X(t)).$$

5. Εφαρμογή (Μελέτη της Διωνυμικής Κατανομής)

$X = \#$ επιτυχιών σε n ανεξ δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτ. p.

$X \sim Bin(n, p)$

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i, \quad I_i = \begin{cases} 1 & , \text{αν η } i \text{ δοκ. επιτ} \\ 0 & , \text{διαφορ} \end{cases} \quad \text{ανεξ.}$$

$$P_{I_i}(z) = P(I_i = 0)\, z^0 + P(I_i = 1)\, z^1 = 1 - p + p \cdot z$$

$$P_X(z) = P_{I_1}(z)\, P_{I_2}(z) \dots P_{I_n}(z) = (1 - p + pz)^n$$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\, z^k$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{(1-p}_{a}+\underbrace{pz)}_{\beta}{}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k$$

$$\Rightarrow P(X=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & , k = 0,1,\dots,n \\ 0 & , k = n+1, n+2, \dots \end{cases}$$

$$E[X] = P_X'(1) = n(1-p+pz)^{n-1} \cdot p \,\big|_{z=1} = np$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= n^2\cancel{p^2} - np^2 + np - n^2\cancel{p^2} \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

$$P_X'(1) = E[X]$$

$$P_X''(1) = E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X]$$

$$\Rightarrow E[X^2] = P_X''(1) + P_X'(1)$$

Με ροπογεννήτριες η λύση θα είναι:

$$M_{I_i}(t) = (1-p)e^{t0} + pe^{t1} = 1-p+pe^t$$

$$\overset{4.}{\Rightarrow} M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

$$E[X] = M_X'(0) = n(1-p+pe^t)^{n-1} pe^t \,|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] = M_X''(0) &= n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}(pe^t)^2 + (1-p+pe^t)^{n-1} pe^t \,|_{t=0} \\ &= n(n-1)p^2 + np \\ &= n^2p^2 - np^2 + np \end{aligned}$$

κάπου
υπάρχει
λάθος