15/12/2017 ΜΑΘΗΜΑ 33

Πιθανογεννήτριες - Ροπογεννήτριες
Εφαρμογές - Ασκήσεις
Ανισότητες στη Θ. Πιθανοτήτων

1. Ορισμός

$$P_X(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} p_X(n) z^n \quad , \; X \text{ διακρ.}$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p_X(x) & , \; X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & , \; X \text{ συν} \end{cases}$$

Σύνδεση:

$$M_X(t) = P_X(e^t)$$
$$P_X(z) = M_X(\ln z)$$

2. Πιθανογεννήτριες διακριτών τ.μ.

1. Bernoulli (p)

$$I_i = \begin{cases} 1 & , \text{ με πιθ } p \\ 0 & , \text{ με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$$P_{I_i}(z) = (1-p)\cdot z^0 + pz^1 = 1-p+pz$$
$$M_{I_i}(z) = P_{I_i}(e^t) = 1-p+pe^t$$

Πίνακας Πιθαν - Ροπογ

1. Bernoulli (p)	$1-p+pz$	$1-p+pe^t$
2. Bin (n,p)	$(1-p+pz)^n$	$(1-p+pe^t)^n$
3. Geom (p)	$\frac{pz}{1-(1-p)z}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
4. NegBin (n,p)	$\left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^n$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^n$
5. Poisson (λ)	$e^{-\lambda(1-z)}$	$e^{-\lambda(1-e^t)}$
6. Uniform ({0,1,...,n-1})	$\frac{1-z^n}{n(1-z)}$	$\frac{1-e^{nt}}{n(1-e^t)}$
7. Exp(λ)	—	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$, $t<\lambda$
8. $\mathcal{N}(0,1)$	—	$e^{t^2/2}$, $t\in\mathbb{R}$
9. $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	—	$e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t}$, $t\in\mathbb{R}$
10. Erlang (n,λ)	—	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$, $t<\lambda$
11. Gamma (a,λ)	—	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a$, $t<\lambda$

συγκλίνουν,
τουλ για $|z|\leq 1$

2. Bin (n,p)

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow X = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} I_i}_{Bernoulli(p)}$, I_i ανεξ

$P_X(z) = P_{I_1}(z) \cdot P_{I_2}(z) \cdot \ldots \cdot P_{I_n}(z) = (1-p+pz)^n$

3. Geom (p)

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την $1^η$ επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές με πιθ. επιτ. p.

$P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p$, $n \geq 1$

$$P_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \cdot p \cdot z^n = pz \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)z]^{n-1}}_{\frac{1}{1-(1-p)z}} = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

4. NegBin (n,p)

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την $n^η$ επιτυχία σε ανεξ. δοκιμές

$P(X=k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$, $k = n, n+1, \ldots$

$$P_X(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} z^n = \ldots$$

Πιο εύκολα,

$X = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{Geom(p),\ ανεξ.}$, $X_i = \#$ δοκιμών μετά την i-1 επιτυχία ως την i επιτυχία

$$\Rightarrow P_X(z) = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z} \right)^n$$

5. Poisson (λ)

$P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^n}{n!}}_{e^{\lambda z}} = e^{-\lambda(1-z)}$$

6. Uniform $(\{0, 1, \ldots, n-1\})$

$P(X=k) = \frac{1}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} z^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{n(1-z)}$$

3. Ροπογεννήτριες Συνεχών τ.μ.

1. $Exp(\lambda)$

σ.π.π. $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{διαφ} \end{cases}$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx$$

$$= \lambda \left. \frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right|_{x=0}^{\infty}$$

$$= \begin{cases} \infty & , t \geq \lambda \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - t} & , t<\lambda \end{cases}$$

2. $X \sim N(0,1)$

σ.π.π. $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \phi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2tx+t^2}{2}} e^{t^2/2} dx$$

$$= e^{t^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}}_{\text{σ.π.π. } N(t,1)} dx}_{1 \,//} = e^{t^2/2}$$

Γενικά, η σ.π.π της $N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

4. Ροπογεννήτρια γραμμικής συνάρτησης τ.μ.

$$Y = aX+b \Rightarrow M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{(at)X} \cdot e^{tb}]$$
$$= e^{bt} E[e^{(at)X}]$$
$$= e^{bt} M_X(at)$$

Εφαρμογή: Ροπογεννήτρια $N(\mu, \sigma^2)$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y = \sigma \underset{N(0,1)}{Z} + \mu$

$$\Rightarrow M_Y(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t)$$
$$= e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$$

5. Εφαρμογή 1: Εκλέπτυνση Poisson

$X \sim$ Poisson (λ), $X = \#$ περιστατικών που φθάνουν σε ένα νοσοκομείο σε μέρα εφημερίας στον Ευαγγελισμό.

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-περιστ. είναι παθολογικό με πιθ. } p \\ 0, & \text{διαφορετικά με πιθ } 1-p \end{cases}$$

ανεξ.

$Y = \#$ παθολογικών περιστατικών $= \sum_{i=1}^{X} I_i$

Κατανομή της $Y =$;

Έχω:

$$P_Y(z) = P_X(P_I(z))$$

δεν γράφω I_i γτ είναι ισόνομες

Όμως, $P_X(z) = e^{-\lambda(1-z)}$

$P_I(z) = 1 - p + pz$

Άρα,

$$P_Y(z) = e^{-\lambda(1-P_I(z))}$$
$$= e^{-\lambda(1-1+p-pz)}$$
$$= e^{-\lambda p(1-z)}$$

Δηλ, $Y \sim$ Poisson (λp)

6. Εφαρμογή 2: Αναγεννητικές Ιδιότητες

$X \sim Bin(n, p)$
$Y \sim Bin(m, p)$ $\Rightarrow$ $Z = X + Y \sim$;
ανεξ.

$$P_Z(z) = P_X(z) \cdot P_Y(z)$$

$$= (1-p+pz)^n (1-p+pz)^m$$
$$= (1-p+pz)^{n+m}$$

$\rightarrow Z \sim Bin(n+m, p)$

7. Βασικές Ανισότητες

1. Ανισότητα Markov: $X \geq 0 \Rightarrow P(X>a) \leq \dfrac{E[X]}{a}$, $a>0$

2. Ανισότητα Chebyshev: $E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2 \Rightarrow P(|X-\mu|>c) \leq \dfrac{Var[X]}{c^2}$

3. Ανισότητα Chernoff: $P(X>a) \leq \inf\limits_{t>0} \{ e^{-ta} M_X(t) \}$, $a>0$

4. Ανισότητα Cauchy-Schwartz: $|E[XY]| \leq E[X^2]^{1/2} E[Y^2]^{1/2}$

5. Ανισότητα Jensen: f κυρτή $f(E[X]) \leq E[f(X)]$

Αποδείξεις:

1. $I(x) = \begin{cases} a, & x>a \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$I(x) \leq X$

$\Rightarrow E[I(X)] \leq E[X]$

$\Rightarrow a \cdot P(X>a) + \underbrace{0 \cdot P(X \leq a)}_{0} \leq E[X]$

$\Rightarrow P(X>a) \leq \dfrac{E[X]}{a}$

2. $P(|X-\mu|>c) = P((X-\mu)^2 > \sigma^2)$

$\leq \dfrac{E[(X-\mu)^2]}{c^2} = \dfrac{Var[X]}{c^2}$

λόγω του 1.

3. $P(X>a) = P(e^{tX} > e^{ta})$, $t>0$

$\leq \dfrac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}$, $t>0$

λόγω της 1.

$= e^{-at} M_X(t)$, $t>0$

Άρα,

$P(X>a) \leq \inf \{ e^{-ta} M_X(t) \}$

4. X, Y τμ

$(tX+Y)^2 \geq 0$, $\forall t$

$E[(tX+Y)^2] \geq 0$, $\forall t$

$\Rightarrow E[t^2X^2 + 2tXY + Y^2] \geq 0$, $\forall t$

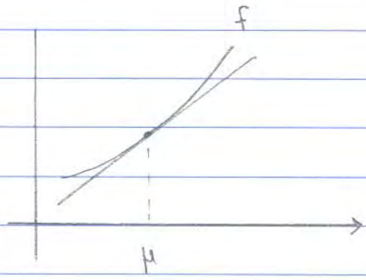
$\Rightarrow E[X^2]t^2 + 2E[XY]t + E[Y^2] \geq 0$, $\forall t$

$\Rightarrow \Delta \leq 0$

$\rightarrow 4E[XY]^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \leq 0$

$\Rightarrow (E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2] \Rightarrow |E[XY]| \leq E[X^2]^{1/2} E[Y^2]^{1/2}$

5. Για f παραγωγίσιμη



Επειδή f κυρτή $\quad f(x) \geq f(\mu)(x-\mu)+f(\mu)$

$x \longrightarrow X$

$\mu \rightarrow E[X]$

$$f(X) \geq f'(E[X])(X-E[X]) + f(E[X])$$

$\Downarrow$

$$E[f(X)] \geq f'(E[X])(\overbrace{E[X]-E[X]}^{0}) + f(E[X])$$

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

Σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών
Νόμος Μεγάλων Αριθμών
Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

1. Ορισμός

$X_1, X_2, X_3, \dots$ τμ στον (Ω, A, P) και X τμ στον (Ω, A, P)

(a.s almost surely)

1. $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} X$, καθώς $n \to \infty$ σχεδόν βέβαια (με πιθανότητα 1), αν
$P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$
ή
$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$

(probability)

2. $X_n \xrightarrow{P} X$, καθώς $n \to \infty$
κατά πιθανότητα (στοχαστικά) αν
$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$

3. $X_n \xrightarrow{L^P} X$, καθώς $n \to \infty$ αν
$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^P] = 0$

(distribution)

4. $X_n \xrightarrow{d} X$, καθώς $n \to \infty$
κατά κατανομή (κατά νόμο) αν
$\lim_{n\to\infty} \underbrace{F_{X_n}(x)}_{\sigma.\kappa \text{ της } X_n} = \underbrace{F_X(x)}_{\sigma.\kappa \text{ της } X}$ για κάθε σημείο συνέχειας x της $F_X(x)$.

2. Σχέση των συγκλίσεων

$X_n \xrightarrow{\sigma\beta} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$
$X_n \xrightarrow{L^P} X \nearrow$

3. Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ)
(Ασθενής)

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες τμ με $E[X_i] = \mu_i$ και $\underbrace{\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots X_n}{n}}_{\text{δειγματικός μέσος}}$
τότε,
$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη: (όταν $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$)

$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon)$

Ανισότητα Chebysher:

Αν $E[X] = \mu$, τότε $P(|X-\mu| \geq c) \leq \frac{Var[X]}{c^2}$

Έχω,

$$E[\bar{X}_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}(E[X_1] + \ldots + E[X_n])$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

$$Var[\bar{X}_n] = Var\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}(Var[X_1] + \ldots + Var[X_n])$$

$$= \frac{1}{n^{2}} \cancel{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

άρα

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = P(|\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0, \text{ καθώς } n \to \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} \mu$$

4. Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ)

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ και ισόνομες τμ

$E[X_i] = \mu$

$Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

ορίζω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{S_n}{n}$

τότε,

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1), \quad \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

τυποποίηση της X

$Z = \frac{X - E[X]}{\sqrt{Var[X]}}$ τυποπ. $E[Z] = 0$, $Var[Z] = 1$

5. ΚΟΘ - Εφαρμογή

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ ισόνομες $E[X_i] = \mu$, $Var[X_i] = \sigma^2$

τότε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \le x\right) = P(Z \le x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le x\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} \le x\right) = P(\underset{N(0,1)}{Z} \le x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \le x\right)$$

6. Υπολογισμός με το ΚΟΘ

Να βρεθεί προσεγγιστικά $P(a < S_n \le b)$ για n μεγάλο (πρακτικά ≥ 30)

Λέω,

$$P(a < S_n \le b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right) \underset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \underset{N(0,1)}{Z} \le \frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

7. Άσκηση

Ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίκτη ~ Uniform ([-5,5]) σε χιλ. €

Προσεγγιστικός υπολογισμός:

(i) P(σε 48 μέρες να κερδίσει τουλ. 30 €) = ;

(ii) ποσό S ώστε με πιθ. τουλ. 95% το εισόδημα σε 48 ημέρες να είναι $\le S$ = ;

(iii) # ημερών n ώστε με πιθ τουλ 95% το εισόδημα να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο των 5 € = ;

Λύση:

Έστω X_i = εισόδημα του χαρτοπαίκτη την μέρα i, $i = 1, 2, \ldots$ ανεξ, ισόνομες

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = συνολικό εισόδημα σε n μέρες.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & , x \in [-5,5] \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-5}^{5} x \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \frac{x^2}{2}\Big|_{x=-5}^{5} = \ldots = 0$$

$Var[X_i] = E[X_i^2] - (\overset{0}{E[X_i]})^2 = \int_{-5}^{5} x^2 \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-5}^{5} = \dots = \frac{25}{3}$

(i) $P(S_{48} \geq 30) = P\left(\frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \geq \frac{30 - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}}\right) \underset{\text{ΚΟΘ}}{\simeq} P\left(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \geq \frac{30 - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}}\right)$

$= P\left(Z \geq \frac{30 - 48\cdot 0}{\sqrt{48\cdot\frac{25}{3}}}\right) = P\left(Z \geq \frac{3}{2}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{3}{2}\right)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right)$

(ii) $s = ;$ ώστε $P(S_{48} \leq s) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{S_{48} - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}} \leq \frac{s - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}}\right) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{s - E[S_{48}]}{\sqrt{Var[S_{48}]}}\right) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{s}{20}\right) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq 0.95$

από τον πίνακα βρίσκω πού αντιστοιχεί

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{s}{20}\right) \geq \Phi(1.96)$

$\overset{\Phi\uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{s}{20} \geq 1.96$

$\Leftrightarrow s \geq 20\cdot 1.96$

(iii) $n = ;$ ώστε $P(|S_n| < 5) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow P(-5 < S_n < 5) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-5 - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq \underbrace{\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}}}_{Z \overset{\text{ΚΟΘ}}{\sim} N(0,1)} \leq \frac{5 - \overset{n\cdot 0}{E[S_n]}}{\sqrt{\underset{n\cdot\frac{25}{3}}{Var[S_n]}}}\right) \geq 0.95$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{\frac{25n}{3}}}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{25n/3}}\right) \geq 0.95$

$\overset{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)}{\Longleftrightarrow} 2\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{25n/3}}\right) - 1 \geq 0.95$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{25n/3}}\right) \geq 0.975$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{25n/3}}\right) \geq \Phi(2) \overset{\Phi\uparrow}{\Leftrightarrow} \frac{5}{\sqrt{25n/3}} \geq 2 \dots$

Ασκήσεις

1. Εστω X τμ με π.π $f(x) = \begin{cases} |x| & , |x|<1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases}$

Ροπογεννήτρια M_X ;

για $t \neq 0$

$$M_X(t) = \int e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x| e^{tx}dx = \int_{-1}^{0}(-x)e^{tx}dx + \int_0^1 x e^{tx}dx = -x\frac{e^{tx}}{t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{t}\int_{-1}^{0} e^{tx}dx + \frac{xe^{tx}}{t}\Big|_0^1$$

$$- \frac{1}{t}\int_0^1 e^{tx}dx = \frac{-e^{-t}}{t} + \frac{1}{t}\,\frac{e^{tx}}{t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\,\frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^1 = \dots = \frac{2-(e^t+e^{-t})+t(e^t-e^{-t})}{t^2}$$

για $t=0$

$M_X(0) = 1$

2. Εστω $n \geq 1$ φυσικός

2 τμ X, R σε κοινό χώρο πιθανότητας

$R \sim \text{Uniform}((0,1))$

$X | R=r \sim Bin(n, r)$, $r \in (0,1)$

(i) Ροπογεννήτρια του X

(ii) κατανομή του X

(i) $M_X(t) = E(e^{tX}) = E[E[e^{tX}|R]] = E[m(R)]$

$m(r) = E(e^{tX}|R=r) = (1-r+re^t)^n \quad r \in [0,1]$

$$M_X(t) = E(m(R)) = \int_0^1 (re^t+1-r)^n dr = \frac{(re^t+1-r)^{n+1}}{(n+1)(e^t-1)}\Big|_0^1 = \frac{e^{t(n+1)}-1}{e^t-1}\,\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(1+e^t+e^{2t}+\dots+e^{nt})}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{tk}}{n+1}$$

(ii) $P(X=k) = \frac{1}{n+1}$, $k=0,1,2,\dots,n$

3. X τμ ακολουθεί την Poisson (λ), $\lambda>0$

$P_X(u) = E[u^X]$;

Για ποιες τιμές της u η P_X είναι πεπερασμένη;

$E[X], Var[X] =$;

$P_X(u) = E(u^X)$

$X \sim$ Poisson $\quad P_X(u) = \sum_{x=0}^{\infty} u^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \dots = e^{\lambda(u-1)}$ πεπερασμένη για κάθε u

$E[X] = P'_X(1)$

$P'_X(u) = E[Xu^{X-1}] = (e^{-\lambda(u-1)})' = \lambda e^{\lambda(u-1)}$ $\Big\}$ $E[X] = \lambda$

$P''_X(u) = E[X(X-1)u^{X-2}] \Rightarrow P''_X(1) = E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X]$

$P''(u) = \lambda^2 e^{\lambda(u-1)} \Rightarrow P''_X(1) = \lambda^2$

$Var[X] = E[X^2] - [E[X]]^2 = (\lambda^2 + E[X]) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

4. Κανονική

$Z \sim N(0,1) \quad M_Z(t) = e^{t^2/2}$

$M_{\{aY+b\}}(t) = e^{bt} M_X(at)$

$X = \sigma Z + \mu \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

(i) $X \sim N(0,\sigma^2)$ Ροπογεννήτρια, $E[X]$, $Var[X]$, $E(X^r)$ ← ροπή

Για $\mu = 0$

$M_X(t) = e^{t^2\sigma^2/2} \Rightarrow M'_X(t) = \frac{\cancel{2}t\sigma^2}{\cancel{2}} e^{t^2\sigma^2/2}$ (*) $\Rightarrow M''_X(t) = \sigma^2 e^{t^2\sigma^2/2} + (t\sigma^2)^2 e^{t^2\sigma^2/2}$ (**)

$M_X(t) = E[e^{tX}]$

$M'_X(t) = E[Xe^{tX}]$

$E[X] = M'_X(0) \overset{(*)}{=} 0$

$M''_X(t) = E[X^2 e^{tX}]$

$E[X^2] = M''(x) \overset{(**)}{=} \sigma^2$

$N(0,\sigma^2) \quad E[X^v]$

$M_X(t) = e^{t^2\sigma^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}(2n)!\, t^{2n}}{2^n n!\,(2n)!}$

$M_X(t) = \sum_{n\geq 0} E[X^n] \frac{t^n}{n!}$

$E[X^v] = \begin{cases} 0 & , r \text{ περιττός} \\ \frac{\sigma^2(2n)!}{2^n n!} & , r = 2n \text{ άρτιος} \end{cases}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ πεπερασμένη $\forall t$

$E[X] = M'_X(0)$

$M'_X(t) = (\mu + t\sigma^2) e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$

$\Rightarrow E[X] = \mu$

$E[X^2] = M''_X(0)$

$M''_X(t) = \sigma^2 e^{t\mu + t^2\sigma^2/2} + (\mu + t\sigma^2)^2 e^{\frac{t\mu + t^2\sigma^2}{2}}$

$E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$

$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \longrightarrow X_i$ ανεξ $\quad \underset{N(\mu,\sigma^2)}{\underbrace{\sum X_i}}$ δουλεύω με ροπογεννήτριες

$M_{X_i}(t) = e^{\frac{t\mu_i + t^2\sigma_i^2}{2}}$ $\quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t) =$

$= e^{\frac{t\mu_1 + t^2\sigma_1^2}{2}} + \dots + e^{\frac{t\mu_n + t^2\sigma_n^2}{2}} = e^{\frac{t(\sum_{i=1}^{n}\mu_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{2}}$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \forall i$

$\downarrow$ ανεξ

$\sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

Επομένως,

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ανεξ.

$X = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$

$M_X(t) = E[e^{tX}] = E[e^{t(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i)}] = e^{tc_0} \cdot E[e^{tc_1X_1}] \dots E[e^{tc_nX_n}]$

$= e^{tc_0} M_{X_1}(c_1 t) \dots M_{X_n}(c_n t)$

$= e^{tc_0} \cdot e^{\frac{c_1 t\mu_1 + c_1^2 t^2 \sigma_1^2}{2}} \dots e^{\frac{c_n t\mu_n + c_n^2 t^2 \sigma_n^2}{2}}$

$M_X(t) = e^{\frac{t(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i) + t^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2\sigma_i^2}{2}}$

$X \sim N\left(c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mu_i^2\right)$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
ανεξ
$\forall i = 1, 2, \dots, n$ $\quad \sum X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$\overline{X}_n = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \dots + \frac{X_n}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$c_i = 1/n \quad \forall i \qquad \mu_i = \mu \quad \forall i \qquad \sigma_i^2 = \sigma^2 \quad \forall i$

$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k \geq a} \binom{k-1}{a-1} x^{k-1}, \quad x<1$$

$X \sim \Gamma(a, \lambda)$, $a, \lambda > 0$ ροπογεννήτρια, $E[X]$, $E[X^2]$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1}$$

$$M_X(t) = \int_0^\infty \frac{e^{tx} \lambda^a e^{-\lambda x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^a \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda-t)^a e^{-(\lambda-t)x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} dx}_{1}$$

$$\overset{t<\lambda}{=} \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^a = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}$$

$$\left.\begin{array}{l} E[X] = M_X'(0) \\ M_X'(t) = -a\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a-1} \end{array}\right\} \Rightarrow E[X] = \frac{a}{\lambda}$$

$$\left.\begin{array}{l} E[X^2] = M_X''(0) \\ M_X''(t) = \frac{a}{\lambda}(-a-1)\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a-1} \end{array}\right\} \Rightarrow E[X^2] = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$

άρα,

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$$

$X_i \sim \Gamma(a_i, \lambda)$ ανεξ $\Rightarrow \Sigma X_i$ $\qquad M_{X_i}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{a_i}$

$$M_{\Sigma X_i}(t) = E[e^{t\Sigma X_i}] = E[e^{tX_1}] \dots E[e^{tX_n}]$$

$$= M_{X_1}(t) \dots M_{X_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_1} \dots \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\sum_{i=1}^n a_i}$$

άρα

$$X \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n a_i, \lambda\right)$$

$X_i \sim exp(\lambda) \Rightarrow \Sigma X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

X_i ανεξ.

$X_i \sim \Gamma(1, \lambda)$

$X \sim \Gamma(a, \lambda)$

$Y = rX = g(X)$

$r > 0$

κλασσικός τρόπος:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

με ροπογεννήτριες:

$$M_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{trX}] = M_X(rt) = \left(1 - \frac{tr}{\lambda}\right)^{-a} = \left(1 - \frac{t}{\lambda/r}\right)^{-a} \Rightarrow Y \sim \Gamma\left(a, \frac{\lambda}{r}\right)$$