3 τύποι προβλημάτων - ερωτημάτων:

(1) n, x γνωστά και ψάχνω $P(S_n \le x) = ;$
a, b γνωστά » $P(a \le S_n \le b) = ;$

(2) n, p γνωστά » $P(S_n \le x) \geq p$, $x = ;$

Η διαδικασία είναι: $P(S_n \le x) \geq p \;\ldots\; \leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-b}{c}\right) \geq p \leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-b}{c}\right) \geq \Phi(a)$
$\leftrightarrow \frac{x-b}{c} \geq a \Leftrightarrow x \geq \ldots$

(3) x, p γνωστά
ώστε $P(S_n \le x) \geq p$ » $n = ;$

08-01-2018

ΜΑΘΗΜΑ 37

Συναρτήσεις Πυκν. Πιθανότητας Συναρτήσεων τμ.

1. 1 - διάστατη

- X τ.μ. με τιμές σε (ανοικτό) διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ συνεχής με σ.π.π. $f_X(x)$
- $g: I \to \mathbb{R}$ 1-1, διαφορίσιμη με $g'(x) \neq 0$, $x \in I$
- $Y = g(X)$

Τότε σ.π.π Y
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\,|(g^{-1})'(y)|, & y \in g(I) \\ 0, & y \notin g(I) \end{cases}$$

Απόδειξη:

$y \notin g(I) \to f_Y(y) = 0$ προφανώς
(το y δεν είναι δυνατή τιμή της Y)

$y \in g(I)$. Τότε

περίπτωση 1: $g \uparrow$ ($g'(x) > 0$ $\forall x \in I$)

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} P(Y \le y)$$
$$= \frac{d}{dy} P(g(X) \le y) = \frac{d}{dy} P(X \le g^{-1}(y))$$
$$= \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = F_X'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)$$
$$= f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1})'(y))$$

$g^{-1} \uparrow$

$$f_X(y)\,dy \simeq P(y < Y \le y + dy)$$
$$= P(y < g(X) \le y\,dy)$$
έστω $g \uparrow$
$$\to \;= P(g^{-1}(y) < X \le g^{-1}(y\,dy))$$
$$\simeq f_X(g^{-1}(y))\,\underbrace{\frac{(g^{-1}(y\,dy) - g^{-1}(y))}{d_y}}_{\simeq (g^{-1})'(y)}$$

περίπτωση 2: $g \searrow$ ($g'(x) < 0 \quad \forall x \in I$)

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} P(Y \leq y)$$
$$= \frac{d}{dy} P(g(x) \leq y) = \frac{d}{dy} (X \geq g^{-1}(y))$$
$$= \frac{d}{dy} (1 - F_X(g^{-1}(y))$$
$$= - F_X'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)$$
$$= - f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)$$
$$g^{-1} \searrow \quad = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)$$

2. Παράδειγμα:

$X \sim \text{Uniform}((0,1))$

$Y = e^X$

σ.π.π. $f_Y(y) =$;

$y = g(x) = e^x$

$g^{-1}(x) = \ln y$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 \cdot \frac{1}{y} & , y \in (1,e) \\ 0 & , y \notin (1,e) \end{cases}$$

3. Πολλές διαστάσεις

- $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με τιμές σε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$
- $g: U \to \mathbb{R}^n$, 1-1, διαφορ. $\det J_g(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in U$

$$\left(g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \quad J_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \right)$$

$Y = g(X)$

$\downarrow$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \det J_{g^{-1}}(g^{-1}(y)) \right| & , y \in g(U) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

4. Παράδειγμα:

X_1, X_2 ανεξ. $\sim Exp(\lambda)$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x_1 > 0 \\ 0 & , x_1 \leq 0 \end{cases} \qquad f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases}$$

$(Y_1, Y_2) = \left(X_1 + X_2 , \frac{X_1}{X_1+X_2} \right)$

$g(x_1,x_2) = \left(x_1 + x_2, \frac{x_1}{x_1+x_2} \right)$

$U \quad (0,\infty) \times (0,\infty)$

Εχω:

$\begin{Bmatrix} y_1 = x_1+x_2 \\ y_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = y_1 y_2 \\ x_2 = y_1(1-y_2) \end{Bmatrix}$

g 1-1, διαφορίσιμη $\qquad (x_1, x_2) = g^{-1}(y_1,y_2)$

$$\det J_g(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{x_2}{(x_1+x_2)^2} & \frac{x_1}{(x_1+x_2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x_1+x_2} \neq 0$$

Εχω:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 y_2, y_1(1-y_2)) \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial(y_1 y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_1 y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial(y_1(1-y_2))}{\partial y_1} & \frac{\partial(y_1(1-y_2))}{\partial y_2} \end{matrix} \right\|$$

$$= \lambda e^{-\lambda y_1 y_2} \lambda e^{-\lambda y_1(1-y_2)} \cdot \left\| \begin{matrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{matrix} \right\|$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda y_1} \left| -y_1 y_2 - y_1(1-y_2) \right|$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda y_1} \cdot y_1 \quad , \quad (y_1,y_2) \in g(U)$$

Εδώ: $\quad g(U) = (0,\infty) \times (0,1)$

Τελικά:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \begin{cases} \lambda^2 y_1 e^{-\lambda y_1} & , y_1 > 0 , \ 0 < y_2 < 1 \\ 0 & , \text{διαφορ} \end{cases}$$

$Y_1 \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$
$Y_2 \sim \text{Uniform}((0,1))$

5. **Παράδειγμα:**

X_1, X_2 ανεξ $\sim \mathcal{N}(0,1)$

$(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$

$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = ;$

$V = \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1+y_2}{2} \\ x_2 = \frac{y_1-y_2}{2} \end{cases} \quad \det J_{g^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2 \neq 0$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \cdot \left|-\frac{1}{2}\right|$$

$$\overset{X_1, X_2}{\underset{\text{ανεξ}}{=}} f_{X_1}\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) f_{X_2}\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1+y_2)^2}{8}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{8}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{y_1^2+y_2^2}{4}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} e^{-y_1^2/2\cdot 2}}_{\substack{\text{σ.π.π.} \\ \mathcal{N}(0,2)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} e^{-y_2^2/2\cdot 2}}_{\substack{\text{σ.π.π.} \\ \mathcal{N}(0,2)}}$$

Y_1, Y_2 ανεξ $\mathcal{N}(0,2)$

Βασικές περιοχές – δεξιότητες

1. Βασικοί υπολογισμοί πιθ. με αξιώματα (εξοικίωση με διαγράμματα Venn, ευχέρια σε πράξεις με ενδεχόμενα)
2. Μοντελοποίηση πειραμάτων τύχης (δειγμ. χώρος, ενδεχόμενα, τυχαίες μεταβλητές)
3. Βασική συνδυαστική
4.* Υπολογισμοί με δεσμευμένη πιθ (θοπ, πολ/κος νόμος, Bayes)
5.* Τυχαίες μεταβλητές (σ.π ή σ.π.π $\rightleftarrows$ σ.κ, $E[X]$, $c = ;$, $Var[X]$, (1 ή πολλές μέσες) $Cov[X,Y]$, $\rho(X,Y)$, συναρτήσεις τμ)
6. Ειδικές κατανομές (Μοντέλα)
7. Πιθανογεννήτριες – Ροπογεννήτριες
8. Ανισότητες, ΝΜΑ, ΚΟΘ*

10/01/2018

Ασκήσεις σε ΚΟΘ

1. Αιτήματα σε ένα server
Το καθε αίτημα τυχαιο χρονο εξυπηρετησης $\sim \exp(\theta)$ $\theta = \frac{1}{2}$
$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} 1_{x>0}$ x σε λεπτα
Σε καθε χρον. στιγμή εξυπηρετείται μόνο ένα αίτημα.
Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθ να εξυπηρετήσει 100 αιτήματα μιας ημέρας σε συνολικό χρόνο 220 λεπτά
Δίνονται: $\Phi(1) = 0,8413$, $\Phi(1,5) = 0,9332$, $\Phi(2) = 0,9773$

X_i $\mu < \infty$
$0 < \sigma^2 < \infty$

$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \underset{\substack{n>30 \\ n \text{ μεγάλα}}}{\sim} N(0,1)$

X_i ο χρονος εξυπηρέτησης ενός αιτήματος
$E[X_i] = \frac{1}{\theta} = 2$, $V[X_i] = \frac{1}{\theta^2} = 4$

$S_v = \sum_{i=1}^{v} x_i \rightarrow$ εδώ S_{100}

Άρα, έχουμε:

$$P(S_{100} \leq 220) = P\left(\frac{S_{100} - E[S_{100}]}{\sqrt{Var[S_{100}]}} \leq \frac{220 - 100 \cdot 2}{\sqrt{100 \cdot 4}} \right) \overset{n>30}{\sim} \underset{N(0,1)}{P(Z \leq 1)} = \Phi(1)$$

2. Ακολουθία ρίψεων ζαριού για j θετικό ακέραιο.
Ορίζω
$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{αν το αποτελ. 5 ή 6} \\ 0, & \text{διαφορ} \end{cases}$$
(i) $E[X_j]$, $Var[X_j] = ;$
(ii) Αν S_{1800} ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις
$P(580 < S_{1800} < 640)$

(i)
$E[X_j] = P(\text{αποτέλεσμα να είναι 5 ή 6}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$X_j \sim$ Bernoulli(p) με $p = \frac{1}{3}$

$Var[X_j] = p(1-p) = \frac{2}{9}$

(ii) $$P(580 < S_{1800} < 640) = P\left(\frac{580 - 1800 \cdot \frac{1}{3}}{\sqrt{1800 \cdot 2/9}} < \frac{S_{1800} - E[S_{1800}]}{\sqrt{Var[S_{1800}]}} < \frac{6400 - 1800 \cdot 1/3}{\sqrt{1800 \cdot 2/9}} \right)$$

$$\underset{n>30}{\simeq} P(-1 < \underset{\sim N(0,1)}{Z} < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) = 0,9773 - 1 + 0,8413 = 0,3186$$

3. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξ ισόνομες τμ καθεμία με διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1,2,3,4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να βρίσκεται στο $[190, 220]$

Δίνονται: $\Phi(1)$, $\Phi(1,5)$, $\Phi(2)$

$$P(X_i = k) = \frac{1}{4}, \quad k = 1,2,3,4$$

$$E[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5/2$$

$$E[X_i^2] = 1^2 \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \frac{1}{4} + 4^2 \frac{1}{4} = 15/2$$

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = 5/4$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P(190 \leq S_{80} \leq 220) = P\left(\frac{190 - 80 \cdot 5/2}{\sqrt{80 \cdot 5/4}} \leq \frac{S_{80} - 80 \cdot 5/2}{\sqrt{80 \cdot 5/4}} \leq \frac{220 - 80 \cdot 5/2}{\sqrt{80 \cdot 5/4}} \right)$$

$$\overset{n>30}{\simeq} P(-1 \leq \underset{\sim N(0,1)}{Z} \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) = \ldots$$

4. Υπολογίστε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως σε 100 ανεξ ρίψεις ενός νομίσματος εμφανιστούν το πολύ 40 επιτυχίες.

Δίνονται: $\Phi(1)$, $\Phi(1.5)$, $\Phi(2)$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & , \text{επιτυχία στην } i \text{ ρίψη} \\ 0 & , \text{αποτυχία} \end{cases}$$

$$X_i \sim Bernoulli(p) \quad p = \frac{1}{2}$$

$$E[X_i] = p = 1/2, \quad Var[X_i] = p(1-p) = \frac{1}{4}$$

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$$

$$P(S_{100} \leq 40) = P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 1/2}{\sqrt{100 \cdot 1/4}} \leq \frac{40 - 100 \cdot 1/2}{\sqrt{100 \cdot 1/4}} \right)$$

$$\underset{n>30}{\simeq} P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} \leq -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,977$$

5. Ο αριθμός τυπογραφικών λαθών μιας σελίδας μιας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 0.7$.
Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθ. όπως το πολύ 36 σελίδες δεν έχουν καθόλου λάθη.
Δίνεται: $e^{-0.7} \approx \frac{1}{2}$, $\Phi(1)$, $\Phi(2)$, $\Phi(3)$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{, η } i \text{ σελίδα δεν έχει λάθη} \\ 0 & \text{, διαφορετικά} \end{cases}$$

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ $\quad p_i = P(\text{η } i \text{ σελίδα δεν έχει λάθος})$

$E[X_i] = p_i = p$

$Y_i = $ # λαθών στην i-σελίδα , $Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$p_i = P[Y_i = 0] = e^{-\lambda} = e^{-0.7} \approx \frac{1}{2} = p \qquad P[Y_i = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Επομένως, $E[X_i] = \frac{1}{2}$, $Var[X_i] = p(1-p) = \frac{1}{4}$

$S_v = \sum_{i=1}^{n} X_i$, S_{64}

$$P(S_{64} \le 36) = P\left(\frac{S_{64} - 64 \cdot 1/2}{\sqrt{64 \cdot 1/4}} \le \frac{36 - 64 \cdot 1/2}{\sqrt{64 \cdot 1/4}}\right) \overset{n>30}{\simeq} P(\underset{\substack{s \\ N(0,1)}}{Z} \le 1) \overset{\kappa \varepsilon \theta}{\le} \Phi(1)$$

6. Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[-0.05, 0.05]$
Ποια είναι κατα προσέγγιση η πιθ. το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 300 μετρήσεων να είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του 0.25.

X_i = το σφάλμα της i-μέτρησης
$X_i \sim \text{Uniform}([\overset{\alpha}{-0.05}, \overset{\beta}{0.05}])$

$E[X_i] = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \quad < \infty$

$Var[X_i] = (\alpha\beta)^2/12 = \frac{1}{1200} \quad < \infty$

X_i ανεξ. ισόνομες

$S_v = \sum_{i=1}^{v} X_i$, S_{300}

$$P(|S_{300}| < 0.25) = P(-0.25 < S_{300} < 0.25) = P\left(\frac{-0.25 - 300 \cdot 0}{\sqrt{300 \cdot 1/1200}} < \frac{S_{300} - 300 \cdot 0}{\sqrt{300 \cdot 1/1200}} < \frac{0.25 - 300 \cdot 0}{\sqrt{300/1200}}\right)$$

$$\overset{n>30}{\simeq} P(-0.5 < \underset{\substack{s \\ N(0,1)}}{Z} < 0.5) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = \ldots$$

7. Δυο ομάδες φοιτητών A και B με 200 μέλη η καθεμιά. Πρόκειται να γράψουν μια εξέταση. Οι επιδόσεις τους είναι ανεξ. μεταξύ τους. Οι επιδόσεις των φοιτητών της A ακολουθούν κοινή κατανομή με μέση τιμή 9 και διασπορά 1/6 ενώ για την B έχουμε μέση τιμή 8.5 και διασπορά 1/3.
Έστω m_A, m_B οι μέσοι όροι των δυο ομάδων.
Να βρεθεί η πιθ. $m_A - m_B \in [0.5, 0.65]$ (εννοείται πριν πραγματοποιηθεί η εξέταση)

$\{X_i\}_{1 \le i \le 200}$: οι επιδόσεις των φοιτητών της A με $E[X_i] = 9$, $Var[X_i] = 1/6$.

$\{Y_i\}_{1 \le i \le 200}$: » » B με $E[Y_i] = 8.5$, $Var[Y_i] = 1/3$.

Ορίζω $W_i = X_i - Y_i$

$$m_A - m_B = \frac{\Sigma X_i}{200} - \frac{\Sigma Y_i}{200} = \frac{\Sigma W_i}{200}$$

$E[W_i] = E[X_i] - E[Y_i] = 9 - 8.5 = 0.5$

$Var[W_i] = Var[X_i - Y_i] = Var[X_i] + Var[Y_i] - 2\underbrace{Cov[X_i Y_i]}_{0 \text{ λόγω ανεξ.}} = 0.5$

$P(m_A - m_B \in [0.5, 0.65]) = P\left(\frac{\Sigma W_i}{200} \in [0.5, 0.65]\right) = P(\Sigma W_i \in [100, 130])$

$= P(100 \le \sum_{i=1}^{n} W_i \le 130) = P\left(\frac{100 - 200 \cdot 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,5}} \le \frac{\sum_{i=1}^{200} - 200 \cdot 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,5}} \le \frac{130 - 200 \cdot 0,5}{\sqrt{200 \cdot 0,5}}\right)$

$\underset{\text{ΚΟΘ}}{\overset{n>30}{\approx}} P(0 \le \underset{\mathcal{N}(0,1)}{Z} \le 3) = \Phi(3) - \Phi(0) \approx 0.9987 - 0,5 = \ldots$