

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2008- Ομάδα Α

Θέμα 1. α) Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά και στη συνέχεια ρίχνουμε ένα νόμισμα τόσες φορές όσο ήταν η ένδειξη του ζαριού. Να υπολογισθεί η πιθανότητα:

- i)* να μην εμφανισθεί καμία φορά η ένδειξη «γράμματα»,
- ii)* να μην εμφανισθούν και οι δύο όψεις του νομίσματος,
- iii)* η ένδειξη του ζαριού να ήταν ο αριθμός «4» δεδομένου ότι δεν εμφανίσθηκε καμία φορά η ένδειξη «γράμματα».

β) Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί την Ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-0.05, 0.05]$. Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 300 μετρήσεων να είναι κατά απόλυτη τιμή μικρότερο του 0.25; (Δίνονται: $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(1) = 0.8413$).

Θέμα 2. α) Το 70% των αυτοκινήτων που φθάνουν σε μία συγκεκριμένη διασταύρωση στρίβουν αριστερά και το 30% δεξιά. Αν η επιλογή της κατεύθυνσης κάθε αυτοκινήτου είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των υπολοίπων, να βρεθεί η πιθανότητα σε 15 αυτοκίνητα που φθάνουν στη διασταύρωση

- i)* τουλάχιστον 13 να στρίψουν αριστερά,
- ii)* τουλάχιστον 13 να στρίψουν στην ίδια κατεύθυνση.
- iii)* Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός αυτοκινήτων που θα στρίψουν αριστερά και ποιος ο αναμενόμενος αριθμός αυτοκινήτων που θα στρίψουν δεξιά;

β) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή $E(X_k) = \mu$ και διασπορά $V(X_k) = \sigma^2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά του δειγματικού μέσου

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}.$$

Θέμα 3. α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{a}{\lambda^a} (x-1)^{a-1} e^{-\left(\frac{x-1}{\lambda}\right)^a}, & x > 1, \end{cases}$$

όπου $a > 0$, $\lambda > 0$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y = \left(\frac{X-1}{\lambda}\right)^a.$$

- i)* Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X .
 - ii)* Να βρεθούν η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας της Y .
 - iii)* Να βρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της Y .
- β)** Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$. Να βρεθεί η ροπογεννήτρια της X (όπου αυτή υπάρχει).

Απαντήστε και στα 3 θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ½ ώρες.

Καλή Επιτυχία.