Ονοματεπώνυμο εξεταζομένου:
Αριθμός μητρώου:

Πιθανότητες Ι, 18/6/2013

Θέμα 1ο: (3 βαθμοί) Απαντήστε με σωστό ή λάθος στις επόμενες ερωτήσεις. Η απάντησή σας θα πρέπει να σημειωθεί στον παρακάτω πίνακα κυκλώνοντας Σ (σωστό) ή Λ (λάθος), ενώ η αιτιολόγησή της θα πρέπει να παρατεθεί στο γραπτό σας. Κάθε σωστή και σωστά αιτιολογημένη απάντηση βαθμολογείται με $+0,5$ βαθμούς. Κάθε λανθασμένη ή λανθασμένα αιτιολογημένη απάντηση βαθμολογείται με $-0,5$ βαθμούς. Η απουσία απάντησης βαθμολογείται με 0 βαθμούς.

Ερώτηση	1		2		3		4		5		6	
Απάντηση	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ

(1) Οι ανεξάρτητες μη-αρνητικές και ακέραιες τ.μ. X και Y έχουν πιθανογεννήτριες $P_X(z) = e^{-3(1-z)}$ και $P_Y(z) = e^{-5(1-z)}$. Ισχύει ότι $P(X+Y=0) > e^{-7}$;

(2) Για τις τ.μ. X και Y γνωρίζουμε ότι $Var[X+Y] = 16$, $E[X^2] = E[Y^2] = 20$, $E[X] = E[Y] = 2$. Ισχύει ότι ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X+Y, Y)$ είναι μεγαλύτερος του $1/3$;

(3) Από μια κάλπη με 5 κόκκινα, 5 πράσινα και 5 μπλέ σφαιρίδια εξάγονται χωρίς επανάθεση 3 σφαιρίδια. Ισχύει ότι η πιθαν. να είναι όλα διαφορ. χρώματος είναι μικρότερη του $1/3$;

(4) Δίνονται τα ενδεχόμενα A και B με $P(A) = 0,5$, $P(B|A) = 0,4$ και $P(A \cup B) = 0,7$. Ισχύει ότι $P(A|B) < 3/7$;

(5) Ένα ζάρι ρίχνεται μέχρι να έρθει τρεις φορές η ένδειξη '2'. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται. Ισχύει ότι $E[X] \leq 16$;

(6) Για την τ.μ. X δίνεται ότι $E[X^3] = 125$ και $Var[X] = 0$. Ισχύει ότι $P(X \leq 6) > 1/2$;

Θέμα 2ο: (3 βαθμοί) Θεωρούμε 10 κάλπες αριθμημένες από το 1 ως το 10, καθεμιά από τις οποίες περιέχει 11 σφαιρίδια. Πιο συγκεκριμένα, οι κάλπες $1, 2, \ldots, 7$ περιέχουν 3 λευκά και 8 μαύρα σφαιρίδια ενώ οι κάλπες $8, 9, 10$ περιέχουν 5 λευκά και 6 μαύρα σφαιρίδια. Διεξάγεται το ακόλουθο πείραμα τύχης: Επιλέγεται στην τύχη μια κάλπη (δηλαδή επιλέγεται η κάλπη i με πιθανότητα $1/10$, για $i = 1, 2, \ldots, 10$) και κατόπιν επιλέγονται με επανάθεση 5 σφαιρίδια. Να υπολογιστούν:

(1) η πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να είναι η κάλπη 3, τα πρώτα 3 σφαιρίδια που εξήχθησαν να είναι λευκά και τα 2 τελευταία μαύρα.

(2) η πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να είναι η κάλπη 3 και να εξήχθησαν συνολικά 3 λευκά και 2 μαύρα σφαιρίδια.

(3) η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν να είναι λευκά.

(4) η δεσμευμένη πιθανότητα η κάλπη που επιλέχθηκε να ήταν η 3, δεδομένου ότι τα σφαιρίδια που εξήχθησαν ήταν όλα λευκά.

(5) ο μέσος αριθμός άσπρων σφαιριδίων που εξήχθησαν.

Θέμα 3ο: (4 βαθμοί) Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xe^{-(3+2y)x} & \text{όταν } x, y > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(1) Να υπολογιστεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ της X.

(2) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y|X}(y|x)$ της Y δοθέντος ότι $X = x$.

(3) Να υπολογιστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Z = 1/X$.

(4) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια $M_X(t)$ της X.

(5) Να υπολογιστεί η $E[XY]$.

(6) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X+Y > X+1 | X > 1)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Πιθανότητες Ι, 18/6/2013
Λύσεις των Θεμάτων - Ομάδα Α

Θέμα 1ο:

1] Λόγω της ανεξαρτησίας η πιθανογεννήτρια της $X+Y$ είναι

$$P_{X+Y}(z) = P_X(z)P_Y(z) = e^{-3(1-z)} \cdot e^{-5(1-z)} = e^{-8(1-z)}.$$

Έχουμε

$$P(X+Y=0) = P_{X+Y}(0) = e^{-8} < e^{-7}$$

Άρα η απάντηση είναι Λ.

2] Είναι

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\,Cov[X,Y]$$

Όμως

$$Var[X+Y]=16,\quad Var[X] = E[X^2]-E[X]^2 = 20-2^2=16,$$
$$Var[Y] = E[Y^2]-E[Y]^2 = 20-2^2=16$$

οπότε

$$Cov[X,Y] = \frac{Var[X+Y]-Var[X]-Var[Y]}{2} = -8.$$

Είναι

$$\rho(X+Y,Y) = \frac{Cov[X+Y,Y]}{\sqrt{Var[X+Y]}\sqrt{Var[Y]}} = \frac{Cov[X,Y]+\overset{Var[Y]}{\overset{\shortparallel}{Cov[Y,Y]}}}{\sqrt{Var[X+Y]}\sqrt{Var[Y]}}$$

$$= \frac{-8+16}{\sqrt{16}\sqrt{16}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

Άρα η απάντηση είναι Σ.

3] Η πιθανότητα όλα τα σφαιρίδια να είναι διαφορετικού χρώματος είναι

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{5\cdot5\cdot5}{\frac{15\cdot14\cdot13}{6}} = \frac{5\cdot5\cdot\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}\cdot\underset{7}{\cancel{14}}\cdot13} = \frac{25}{91} < \frac{1}{3}$$

Άρα η απάντηση είναι Σ.

4] Έχουμε

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2 \text{ και}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$\Rightarrow 0{,}7 = 0{,}5 + P(B) - 0{,}2$$

$$\Rightarrow P(B) = 0{,}4.$$

Επομένως

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2} > \frac{3}{7}$$

Άρα η απάντηση είναι Λ.

5] Έστω X_1 ο αριθμός των ρίψεων μέχρι την πρώτη φορά που θα εμφανιστεί η ένδειξη '2' (επιτυχία). Ομοίως, έστω X_2 και X_3 ο αριθμός των ρίψεων αμέσως μετά το πρώτο '2' ως το δεύτερο '2' και αμέσως μετά το δεύτερο '2' ως το τρίτο '2'. Είναι φανερό ότι οι X_1, X_2, X_3 είναι ισόνομες με γεωμετρική κατανομή.

$$P(X_i = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Έχουμε

$$E[X_i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = 6.$$

Είναι $X = X_1 + X_2 + X_3$ οπότε $E[X] = 6 + 6 + 6 = 18 > 16$.

Άρα η απάντηση είναι Λ.

6] Αφού $Var[X] = 0$ η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $P(X = c) = 1$. Επομένως

$$125 = E[X^3] = c^3 \cdot P(X = c) = c^3 \Rightarrow c = 5$$

Άρα $P(X = 5) = 1$ οπότε $P(X \leq 6) = 1 > \frac{1}{2}$.

Άρα η απάντηση είναι Σ.

Θέμα 2ο:

1] Έστω τα ενδεχόμενα

A_1: η κάλπη που επιλέγεται είναι η 3

A_2: το 1ο σφαιρ. λευκό

A_3: το 2ο σφαιρ. λευκό

A_4: το 3ο σφαιρ. λευκό

A_5: το 4ο σφαιρ. μαύρο

A_6: το 5ο σφαιρ. μαύρο

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι η $P(A_1 A_2 \cdots A_6)$

και από τον πολ/κό νόμο

$$P(A_1 A_2 \cdots A_6) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_6 | A_1 A_2 \cdots A_5)$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{8}{11}$$
$$= \frac{3^3 8^2}{10 \cdot 11^5}.$$

2] Έστω τα ενδεχόμενα

B_1: η κάλπη που επιλέγεται είναι η 3

B_2: εξάγονται 3 λευκά και 2 μαύρα

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι η $P(B_1 B_2)$ και από τον πολ/κό νόμο

$$P(B_1 B_2) = P(B_1) P(B_2 | B_1)$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \underbrace{\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^3 \left(\frac{8}{11}\right)^2}_{P(3 \text{ επιτυχίες} (= \text{λευκά}) \text{ σε } 5 \text{ δοκιμές}) \ (\text{Διων. κατανομή})}$$

3] Έστω τα ενδεχόμενα

Γ: όλα τα σφαιρίδια που εξήχθησαν είναι λευκά

Δ_i: η κάλπη που επιλέγεται είναι η i, $i = 1, 2, \ldots, 10$

Η πιθανότητα που ζητάμε είναι η $P(\Gamma)$. Από θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(\Gamma) = \sum_{i=1}^{10} P(\Delta_i) P(\Gamma | \Delta_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} P(\Gamma | \Delta_i).$$

Όμως για $i = 1, 2, \ldots, 7$ είναι

$$P(\Gamma|\Delta_i) = \left(\frac{3}{11}\right)^5$$

Ενώ για $i = 8, 9, 10$ είναι

$$P(\Gamma|\Delta_i) = \left(\frac{5}{11}\right)^5$$

οπότε

$$P(\Gamma) = \frac{7}{10}\cdot\left(\frac{3}{11}\right)^5 + \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^5 = \frac{7\cdot 3^5 + 3\cdot 5^5}{10\cdot 11^5}.$$

4) Με το συμβολισμό του 3) ζητάμε $P(\Delta_3|\Gamma)$ και από το Νόμο του Bayes είναι

$$P(\Delta_3|\Gamma) = \frac{P(\Delta_3)P(\Gamma|\Delta_3)}{P(\Gamma)} = \frac{\frac{1}{10}\left(\frac{3}{11}\right)^5}{\frac{7\cdot 3^5 + 3\cdot 5^5}{10\cdot 11^5}} = \frac{3^5}{7\cdot 3^5 + 3\cdot 5^5}.$$

5) Έστω

X : η κάλπη που επιλέχθηκε

Y : ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων που εξήχθησαν.

Από το θεώρημα διπλής μέσης τιμής είναι

$$E[Y] = E[E[Y|X]] = \sum_{i=1}^{10} P(X=i)E[Y|X=i]$$

Όμως $(Y|X=i) \sim$ Διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(5, \frac{3}{11})$, $i=1,2,\ldots,7$

ενώ $(Y|X=i) \sim$ Διωνυμική κατανομή $\mathrm{Bin}(5, \frac{5}{11})$, $i=8,9,10$

Άρα $E[Y|X=i] = 5\cdot\frac{3}{11} = \frac{15}{11}$, $i=1,2,\ldots,7$

ενώ $E[Y|X=i] = 5\cdot\frac{5}{11} = \frac{25}{11}$, $i=8,9,10$.

Τελικά

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{7}\frac{1}{10}\cdot\frac{15}{11} + \sum_{i=8}^{10}\frac{1}{10}\cdot\frac{25}{11}$$

$$= \frac{7\cdot 15 + 3\cdot 25}{10\cdot 11} = \frac{180}{110} = \frac{18}{11}.$$

Θέμα 3ο:

(1)
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$
$$= \int_0^{\infty} 6x\, e^{-(3+2y)x}\,dy$$
$$= 6x e^{-3x} \int_0^{\infty} e^{-2xy}\,dy$$
$$= 6x e^{-3x} \left[\frac{e^{-2xy}}{-2x} \right]_{y=0}^{\infty}$$
$$= 6x e^{-3x} \frac{0-1}{-2x}$$
$$= 3e^{-3x}, \quad x>0$$

ενώ

$$f_X(x) = 0, \quad x \leq 0.$$

Άρα η περιθώρια σ.π.π. της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Δηλαδή η $X \sim Exp(3)$ (η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο 3).

(2) Η $f_{Y|X}(\cdot|x)$ ορίζεται για $x>0$, οπότε $f_X(x)>0$.
Για $x>0$ έχουμε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{6x e^{-(3+2y)x}}{3e^{-3x}}, & y>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2x\, e^{-2xy}, & y>0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δηλαδή $(Y|X=x) \sim Exp(2x)$.

(3) Έχουμε για τη συνάρτηση κατανομής της Z, $F_Z(z)$:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(1/X \le z)$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ P(X \ge 1/z), & z > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \int_{1/z}^{\infty} 3e^{-3x}dx, & z > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ e^{-3/z} & z > 0 \end{cases}$$

Η $F_Z(z)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο εκτός από το σημείο 0. Άρα η Z είναι συνεχής τ.μ. με σ.π.π. $f_Z(z)$ όπου

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{z^2}e^{-3/z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(4) Είναι

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx}\, 3e^{-3x}dx$$

$$= \frac{3}{3-t}, \quad t < 3$$

(5) Είναι

$$E[XY] = E[E[XY|X]] = E[XE[Y|X]]$$

$$\underset{(2)}{\text{βλέπε}} \rightarrow = E[X \cdot \frac{1}{2X}]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Εναλλακτικά

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xy\, 6x e^{-(3+2y)x}\,dy\,dx$$

$$= 6\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-3x} \underbrace{\int_{0}^{\infty} y e^{-2xy}\,dy}_{= \frac{1}{4x^2}} \,dx$$

(με παραγοντική ολοκλήρωση)

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

(6) Είναι

$$P(X+Y > X+1 \mid X>1) = P(Y>1 \mid X>1)$$

$$= \frac{P(X>1, Y>1)}{P(X>1)}$$

Όμως

$$P(X>1, Y>1) = \int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty} 6x e^{-(3+2y)x}\,dy\,dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} 3e^{-3x}\int_{1}^{\infty} 2x e^{-2xy}\,dy\,dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} 3e^{-3x}\left[-e^{-2xy}\right]_{y=1}^{\infty} dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} 3e^{-3x} e^{-2x}\,dx$$

$$= \tfrac{3}{5} e^{-5}$$

$$P(X>1) = e^{-3}$$

Άρα

$$P(X+Y > X+1 \mid X>1) = \tfrac{3}{5} e^{-2}$$