Πιθανότητες Ι, 26 Ιανουαρίου 2018 **A**

Θέμα 1ο: (α) Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 9 κάρτες. Από αυτές, 2 έχουν και τις δύο πλευρές κόκκινες, 3 έχουν και τις δύο πλευρές πράσινες και 4 έχουν μία πλευρά κόκκινη και μία πλευρά πράσινη. Επιλέγουμε στην τύχη μία κάρτα και ακολούθως βλέπουμε στην τύχη μία πλευρά της. Να υπολογιστούν:

(1) (1 μον.) Η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά.

(2) (1 μον.) Η πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δύο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη.

(β) (1 μον.) Ρίχνουμε συνεχώς ένα συνηθισμένο ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «1». Να υπολογιστεί η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι.

Θέμα 2ο: Έστω X, Y ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = 2e^{-2x}1_{\{x>0\}}, \quad f_Y(y) = 5e^{-5y}1_{\{y>0\}}.$$

(1) (1 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P(3 < X < 5 \mid X > 4)$.

(2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X < Y)$.

(3) (1 μον.) Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής της $\min(X, Y)$.

(4) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της $Z = 2X + 5Y$.

Θέμα 3ο: Έστω (X, Y) διδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^3e^{-2xy}1_{\{0<x<1,y>0\}}.$$

(1) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

(2) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X.

(3) (0.5 μον.) Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y|X = x]$.

(4) (1 μον.) Να υπολογιστεί η $E[XY]$.

Θέμα 4ο: (α) Η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^{4t}}{1 - t^2}, \quad |t| < 1.$$

(1) (0.5 μον.) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.

(2) (1 μον.) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$P(X \leq 1) \leq \frac{2}{9}.$$

(β) (1 μον.) Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_{72}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με ροπογεννήτρια όπως στο ερώτημα (α), να υπολογίσετε κατά προσέγγιση την πιθανότητα

$$P(264 < X_1 + X_2 + \cdots + X_{72} < 300).$$

[$\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, $\Phi(3) = 0.9987$]

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!

Λύσεις:

Θέμα 1ο:

(α) Έστω K_i το ενδεχόμενο να επιλεγεί κάρτα που έχει i κόκκινες πλευρές, $i = 0, 1, 2$ και K το ενδεχόμενο να δούμε κόκκινη πλευρά.

(1) Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας η πιθανότητα να δούμε κόκκινη πλευρά είναι

$$P(K) = P(K_0)P(K|K_0) + P(K_1)P(K|K_1) + P(K_2)P(K|K_2) = \frac{3}{9}\cdot 0 + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{9}\cdot 1 = \frac{4}{9}.$$

(2) Από τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα η κάρτα που επιλέχθηκε να έχει και τις δυο πλευρές κόκκινες δεδομένου ότι η πλευρά που είδαμε ήταν κόκκινη είναι

$$P(K_2|K) = \frac{P(K_2)P(K|K_2)}{P(K)} = \frac{\frac{2}{9}\cdot 1}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

(β) Έστω T ο αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά «1» και X_i η ένδειξη που εμφανίζεται στην i ρίψη του ζαριού, $i = 1, 2, \ldots$. Η μέση τιμή του αθροίσματος όλων των ενδείξεων που έφερε το ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη «1» είναι

$$m = E\left[\sum_{i=1}^{T} X_i\right].$$

Δεσμεύοντας στην X_1 (δηλαδή εφαρμόζοντας το θεώρημα της διπλής ή επαναλαμβανόμενης μέσης τιμής) έχουμε:

$$\begin{aligned} m &= P(X_1 = 1)E\left[\sum_{i=1}^{T} X_i | X_1 = 1\right] + P(X_1 \neq 1)E\left[\sum_{i=1}^{T} X_i | X_1 \neq 1\right] \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}(E[X_1|X_1 \neq 1] + m). \end{aligned}$$

Επίσης

$$E[X_1|X_1 \neq 1] = \sum_{k=1}^{6} kP(X_1 = k|X_1 \neq 1) = \sum_{k=2}^{6} k\frac{1}{5} = 4,$$

οπότε έχουμε την εξίσωση

$$m = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(4 + m)$$

που δίνει $m = 21$.

Θέμα 2ο:

(1) Από την αμνήμονη ιδιότητα της εκθετικής κατανομής έχουμε

$$P(3 < X < 5|X > 4) = P(X < 5 - 4) = \int_0^1 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2}.$$

Εναλλακτικά υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} P(3 < X < 5|X > 4) &= \frac{P(4 < X < 5)}{P(X > 4)} = \frac{\int_4^5 2e^{-2x}dx}{\int_4^\infty 2e^{-2x}dx} \\ &= \frac{e^{-2\cdot 4} - e^{-2\cdot 5}}{e^{-2\cdot 4}} = 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

(2) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= \int_0^\infty \int_x^\infty 2e^{-2x} \cdot 5e^{-5y} dy dx = \int_0^\infty 2e^{-2x} \int_x^\infty 5e^{-5y} dy dx \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2x} [-e^{-5y}]_{y=x}^\infty dx = \int_0^\infty 2e^{-7x} dx = \left[\frac{-2e^{-7x}}{7} \right]_{x=0}^\infty = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

(3) Έστω $F_W(z)$ η συνάρτηση κατανομή της $W = \min(X, Y)$. Προφανώς $F_W(w) = 0$ για $w \le 0$, ενώ για $w > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(W \le w) = P(\min(X,Y) \le w) = 1 - P(\min(X,Y) > w) = 1 - P(X > w, Y > w) \\ &= 1 - P(X > w) P(Y > w) = 1 - e^{-2w} e^{-5w} = 1 - e^{-7w}. \end{aligned}$$

(4) Έχουμε

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] = E[e^{2tX + 5tY}] = E[e^{2tX}] E[e^{5tY}] \\ &= \int_0^\infty e^{2tx} 2e^{-2x} dx \cdot \int_0^\infty e^{5ty} 5e^{-5y} dy \\ &= \left[\frac{-e^{-2(1-t)x}}{(1-t)} \right]_{x=0}^\infty \cdot \left[\frac{-e^{-5(1-t)y}}{(1-t)} \right]_{y=0}^\infty \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(1-t)^2}, & t < 1, \\ \infty, & t \ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Θέμα 3ο:

(1) Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^\infty c x^3 e^{-2xy} dy dx \\ &= c \int_0^1 x^3 \int_0^\infty e^{-2xy} dy dx = c \int_0^1 x^3 \left[\frac{-e^{-2xy}}{2x} \right]_{y=0}^\infty dx \\ &= \frac{c}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{c}{6}, \end{aligned}$$

Οπότε $c = 6$.

(2) Έστω $f_X(x)$ η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X. Είναι $f_X(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, αφού $f_{X,Y}(x,y) = 0$ για $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Για $x \in (0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^\infty f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^\infty 6x^3 e^{-2xy} dy \\ &= 6x^3 \int_0^\infty e^{-2xy} dy = 6x^3 \left[\frac{-e^{-2xy}}{2x} \right]_{y=0}^\infty \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

(3) Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας της Y δεδομένου ότι $X = x$ ορίζεται όταν $f_X(x) > 0$, δηλαδή για $x \in (0,1)$. Τότε $f_{Y|X}(y|x) = 0$ για $y \le 0$, ενώ για $y > 0$ έχουμε

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6x^3 e^{-2xy}}{3x^2} = 2xe^{-2xy}.$$

Επομένως η δεσμευμένη κατανομή της Y δεδομένου ότι $X = x$ είναι εκθετική με παράμετρο $2x$ οπότε $E[Y|X=x] = \frac{1}{2x}$. Αναλυτικά, για $x > 0$, έχουμε ότι

$$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^\infty y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_0^\infty y 2x e^{-2xy} dy = \frac{1}{2x}.$$

(4) Εφαρμόζοντας το θεώρημα της διπλής ή επαναλαμβανόμενης μέσης τιμής έχουμε

$$E[XY] \;=\; E[E[XY|X]] = E[XE[Y|X]] = E\left[X\frac{1}{2X}\right] = \frac{1}{2}.$$

Πιο αναλυτικά, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[XY] &= E[E[XY|X]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[XY|X=x] f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2x} f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f_X(x)dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Θέμα 4ο:
(α)
(1) Έχουμε

$$\begin{aligned} E[X] &= M_X'(0) = \left.\frac{4e^{4t}(1-t^2) - e^{4t}(-2t)}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{4e^{4t}}{1-t^2} + \frac{2te^{4t}}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} = 4 \\ E[X^2] &= M_X''(0) \\ &= \left.\frac{16e^{4t}(1-t^2) - 4e^{4t}(-2t)}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} \\ &\quad + \left.\frac{(2e^{4t} + 8te^{4t})(1-t^2)^2 - 2te^{4t}2(1-t^2)2t}{(1-t^2)^4}\right|_{t=0} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Άρα

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2.$$

(2) Έχουμε

$$P(X \le 1) \;=\; P(X - E[X] \le -3) \le P(|X - E[X]| \ge 3) \le \frac{Var[X]}{3^2} = \frac{2}{9},$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Chebyshev.
(β) Έστω $S_{72} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{72}$. Έχουμε $E[S_{72}] = 72\cdot 4 = 288$ και $Var[S_{72}] = 72\cdot 2 = 144 = 12^2$. Χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση το κεντρικό οριακό θεώρημα και έχουμε

$$\begin{aligned} P(264 < X_1 + X_2 + \cdots + X_{72} < 300) &= P(264 < S_{72} < 300) \\ &= P\left(\frac{264-288}{12} < \frac{S_{72} - E[S_{72}]}{\sqrt{Var[S_{72}]}} < \frac{300-288}{12}\right) \\ &\simeq P(-2 < Z < 1), \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) \\ &= 0.8186. \end{aligned}$$