ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1

1. Έστω $X := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{\beta,\gamma\}\}$$
$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}\}$$

α) Είναι οι $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρες;

β) Δείξτε ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

2.Έστω $X := \mathbb{R}$ και

α)

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

β)

$$\mathcal{A}_0 := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$$

Να δειχθεί ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.

γ)

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ **δεν** είναι σ-άλγεβρα.

3. Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση.
α) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X, θέτουμε

$$\mathcal{B} : = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y.

β) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y, θέτουμε

$$\mathcal{A} : = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

4. Έστω X σύνολο και $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{A}_0)$ η σ-άλγεβρα στο X που παράγεται απο την οικογένεια $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$.

α) Να δειχθεί ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ υπάρχει αριθμήσιμο $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{A}_1)$.

β) Έστω μ πεπερασμένο μέτρο στο $(X, \mathcal{A})$. Να δειχθεί οτι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0$ και $A_1 \in \sigma(\mathcal{A}_1)$ ώστε $\mu(A \triangle A_1) < \varepsilon$ (και άρα $|\mu(A) - \mu(A_1)| < \varepsilon$). Υπενθύμιση: $\triangle$ δηλώνει τη συμμετρική διαφορά δύο συνόλων. $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. Έστω $X = \mathbb{R}$, και $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Για $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο,} \\ 1 & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο.} \end{cases}$$

Να δειχθεί οτι το μ είναι μέτρο.

Λύση της 4.

α) Θέτουμε

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : \text{ υπάρχει αριθμήσιμο } \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0 \text{ ώστε } A \in \sigma(\mathcal{A}_1)\} \subset \mathcal{A}.$$

Η άσκηση ζητάει να δείξουμε οτι $\mathcal{C} = \mathcal{A}$.

Βήμα 1. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{C}$.

Γιατί για $A \in \mathcal{A}_0$ παίρνουμε $\mathcal{A}_1 = \{A\}$, πεπερασμένο.

Βήμα 2. Η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα.

Προφανώς $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, και αν $A \in \mathcal{C}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{C}$ (γιατί;). Έπειτα αν $A_i \in \mathcal{C}$ για κάθε $i \geq 1$, τότε υπάρχουν αριθμήσιμα $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_0$ ώστε $A_i \in \sigma(\mathcal{A}_i)$ για κάθε $i \geq 1$. Θέτουμε $\tilde{\mathcal{A}} := \cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_i$, το οποίο είναι αριθμήσιμο. Τότε

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\cup_{i=1}^{\infty}\sigma(\mathcal{A}_i)) = \sigma(\cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_i) = \sigma(\tilde{\mathcal{A}}).$$

(Η πρώτη ισότητα θέλει λίγη σκέψη. Το $\supset$ είναι προφανές. Το $\subset$;). Άρα $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.

Απο τα βήματα 1, 2 και τον ορισμό της παραγόμενης σ-άλγεβρας, έπεται ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) \subset \mathcal{C}$ (δηλαδή το $\mathcal{C}$ δεν περιέχει απλώς το $\mathcal{A}_0$ αλλά και ολόκληρη τη σ-άλγεβρα που το $\mathcal{A}_0$ παράγει). Άρα $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$. Η $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ ισχύει απο τον ορισμό της $\mathcal{C}$.

β) Όπως και στο α), ορίζουμε

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει πεπερασμένο } \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_0 \text{ και } B \in \sigma(\mathcal{A}_1) \text{ ώστε } \mu(A \triangle B) < \varepsilon\}$$

Προφανώς $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{C}$. Δείχνουμε πάλι οτι το $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα. Εύκολα $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, και αν $A \in \mathcal{C}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{C}$. Το $\mathcal{A}_1$ που δουλεύει για το A δουλεύει και για το $X \setminus A$.

Έστω τώρα $A_i \in \mathcal{C}$ για κάθε $i \geq 1$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ υπάρχει $n_0 \geq 1$ με

$$0 \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \mu(\cup_{i=1}^{n_0} A_i) < \varepsilon/2. \tag{1}$$

Υπάρχουν πεπερασμένα $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_0$ και $B_i \in \sigma(\mathcal{A}_i)$ για κάθε $1 \leq i \leq n_0$ ώστε

$$\mu(A_i \triangle B_i) < \varepsilon/2^{i+1}. \tag{2}$$

Θέτουμε $\tilde{\mathcal{A}} := \cup_{i=1}^{n_0}\mathcal{A}_i$, το οποίο είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{A}_0$ Τότε

$$B := \cup_{i=1}^{n_0} B_i \in \sigma(\cup_{i=1}^{n_0}\sigma(\mathcal{A}_i)) = \sigma(\cup_{i=1}^{n_0}\mathcal{A}_i) = \sigma(\tilde{\mathcal{A}})$$

και

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \triangle B \subset \{(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \setminus (\cup_{i=1}^{n_0} A_i)\} \bigcup \big(\cup_{i=1}^{n_0} (A_i \triangle B_i)\big)$$

Οι (1), (2) δίνουν ότι

$$\mu\big((\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \triangle B\big) < \varepsilon.$$

Επομένως $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$.