ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4

1. Έστω $n \geq 1$, χρόνοι $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, και $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι η

$$a_1 B_{t_1} + \cdots + a_n B_{t_n}$$

έχει κανονική κατανομή. Ποιά είναι η μέση τιμή και διασπορά της;

2. Για την τυπική κίνηση Brown να δειχθεί ότι

$$P(\text{η } (t \mapsto B_t) \text{ είναι μονότονη σε κάποιο υποδιάστημα του } [0, \infty)) = 0$$

χωρίς να χρησιμοποιηθεί η μή διαφορισιμότητα της.

3. Άσκηση 2.1 από το Κεφάλαιο 7 του Durrett.

4. Για σταθερό $t_0 > 0$, να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}_0(\text{η } B \text{ έχει τοπικό μέγιστο στο } t_0) = 0. \tag{1}$$

Απο την άλλη, με πιθανότητα 1 ισχύει ότι η B είναι συνεχής και ικανοποιεί (Θεώρημα 2.12, Κεφ. 7)

$$\varliminf_{t\to\infty} B_t = -\infty, \varlimsup_{t\to\infty} B_t = \infty.$$

Άρα έχει τοπικά μέγιστα. Πως συμβιβάζεται αυτο με την (1);

5. Άσκηση 2.3 από το Κεφάλαιο 7 του Durrett.

6. Έστω $x, t > 0$ και $A \subset [0, \infty)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbb{P}_x(B_s \geq 0 \text{ για } 0 \leq s \leq t \text{ και } B_t \in A) = \mathbb{P}_x(B_t \in A) - \mathbb{P}_{-x}(B_t \in A).$$

7. Άσκηση 5.1 από το Κεφάλαιο 7 του Durrett.

8. Άσκηση 5.2 από το Κεφάλαιο 7 του Durrett.

Υποδείξεις

1. Θέτοντας $s_i := a_i + \ldots + a_n$, η διασπορά είναι

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 (t_i - t_{i-1}).$$

2. Παίρνουμε $a < b$, $n \geq 1$, και $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$. Τότε έχουμε την εξής σχέση

$$\begin{aligned}\{(t \mapsto B_t) \text{ μονότονη στο } (a,b)\} \subset \{&B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \geq 0 \text{ για κάθε } 2 \leq i \leq n\} \\ \cup \{&B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \leq 0 \text{ για κάθε } 2 \leq i \leq n\}.\end{aligned}$$

Ποιά είναι η πιθανότητα των δύο τελευταίων γεγονότων; Στο τέλος θα χρησιμοποιήσουμε ότι κάθε διάστημα (c, d) περιέχει ένα διάστημα με ρητά άκρα a, b.

3. Γράφουμε $P_0(L \leq t) = E_0(\mathbf{1}_{L \leq t}) = E_0(\mathbf{1}_{T_0 \circ \theta_1 > t}) = E_0(E_0(\mathbf{1}_{T_0 \circ \theta_1 > t} \,|\, \mathcal{F}_t^+))$ και χρησιμοποιούμε την ιδιότητα Markov (Θεώρημα (2.1)).

Πρακτικά/εναλλακτικά, εφαρμόζουμε την Markov το χρόνο t, δηλαδή, $E_0(\mathbf{1}_{L \leq t}) = E_0(E(\mathbf{1}_{L \leq t} \,|\, B_t)) =$ ...

4. Η $(B_{t_0+t} - B_{t_0})_{t \geq 0}$ είναι τυπική κίνηση Brown. Έπειτα, το Θεώρημα 2.6 δίνει το ζητούμενο.

5. Η $(B_{a+t} - B_a)_{t \geq 0}$ είναι τυπική κίνηση Brown. Έπειτα, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.7.

6. Χρησιμοποιούμε την αρχή την ανάκλασης. Έστω

$$T^- := \inf\{t \geq 0 : B_t < 0\}.$$

Τότε

$$\mathbb{P}_x(B_t \in A) = \mathbb{P}_x(T^- > t, B_t \in A) + \mathbb{P}_x(T^- \leq t, B_t \in A).$$

Μένει να δειχθεί ότι $\mathbb{P}_x(T^- \leq t, B_t \in A) = \mathbb{P}_x(B_t \in -A) = \mathbb{P}_{-x}(B_t \in A)$.