Εξέταση χειμερινού εξαμήνου 21-22 (21-1-21)

Οδηγίες: Α. Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά

Β. Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

Γ. Στό πάνω μέρος της κόλλας να γράψετε:

1º καιμάκιο: Θέλω να βαθμολογηθούν τα θέματα: (π.χ. 1,3,4)

Θέμα 1º (α) Είναι η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y=0 \\ x\cdot\log(x^2+y^2) & \end{cases}$, συνεχής στο $(0,0)$; Εξηγείστε.

(β) Έστω S η σφαίρα που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2+z^2=r^2$ $(r>0)$. Αν $P=(\alpha,\beta,\gamma)\in S$, να ευρεθούν:

(i) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο P.

(ii) Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της S στο P.

Θέμα 2º (α) Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης

$$f(x,y)=\frac{ax}{x^2+y^2+1}$$, όπου a θετική σταθερά.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F(x,y,z)=(xz,\,xy,\,yz)$ είναι C^1 στον $\mathbb{R}^3$ και ελέγξτε αν είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο $(1,1,-1)$.

Θέμα 3º Να υπολογισθεί το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^2\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dy\right)dx .$$

Θέμα 4º (α) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C x^2y\,dx-y^2x\,dy$$

όπου C είναι το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου D που φράσσεται από το ημικύκλιο $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $(a>0)$ και του άξονα των x.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και αλλάξτε την τάξη ολοκλήρωσης στο ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}f(x,y)\,dy\right)dx .$$

Καλή επιτυχία

Εξέταση χειμερινού εξαμήνου 21-22 (21-1-21)

Οδηγίες: Α. Διάρκεια εξέτασης 90 λεπτά.

Β. Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα. Τα θέματα είναι βαθμολογικά είναι ισοδύναμα.

Γ. Στό πάνω μέρος της κόλλας να γράψετε:

2º κλιμάκιο: Θέλω να βαθμολογηθούν τα θέματα: (π.χ. 1,2,3).

Θέμα 1º (α) Να υπολογισθούν τα ακόλουθα όρια, οποτεδήποτε υπάρχουν: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

(β) Έστω S το ελλειψοειδές που ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c>0)$. Αν $P=(x_0,y_0,z_0)\in S$, να ευρεθεί

(i) η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της S στο P και

(ii) αν $P=\lambda(a,b,c)$ όπου $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$, να υπολογισθεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο P.

Θέμα 2º (α) Έστω $f(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\in U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(i) Αποδείξτε ότι η f είναι C^1 στο U.

(ii) Αν $(a,b)\in U$ υπολογίστε τον πίνακα Jacobi $J_{f(a,b)}$ της f στο (a,b) και αποδείξτε ότι η f είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο (a,b).

(β) Έστω $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x+a$, όπου $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι η f είναι C^1 στον $\mathbb{R}^n$ και υπολογίστε τον πίνακα Jacobi $J_{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Θέμα 3º Να υπολογισθεί το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-3}^{3}\left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \log(x^2+y^2+9)\,dy\right)dx$$

Θέμα 4º (α) Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C 2x\arctan y\,dx-\frac{x^2y^2}{1+y^2}\,dy$$

όπου C το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ και $(0,2)$.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Σχεδιάστε την περιοχή ολοκλήρωσης και αλλάξτε την τάξη ολοκλήρωσης στο ακόλουθο διαδοχικό ολοκλήρωμα.

$$\int_0^4\left(\int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Καλή επιτυχία