$$|\log x_k - \log y_k| = \left|\frac{1}{\xi_k}(x_k - y_k)\right| \le \frac{1}{\varepsilon}|x_k - y_k|$$

(η τελευταία ανισότητα έπεται από το ότι $\xi_k \ge \varepsilon$). Και η ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \log x$, $x > \varepsilon$, έπεται.

10. Οι συναρτήσεις της μορφής

$$x \to \log|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n|$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς πάνω στο σύνολο $\mathbb{R}^n - \Pi_\varepsilon$ όπου Π_ε είναι το σύνολο

$$\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n| \le \varepsilon\}.$$

11. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 - \{|x| + |y| \le \varepsilon\} \to \mathbb{R}$, με $f(x,y) = \log(|x| + |y|)$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, οι συναρτήσεις $(x,y) \to |x|$ και $(x,y) \to |y|$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, και συνεπώς και η συνάρτηση $(x,y) \to |x| + |y|$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα το αυτό θα συμβαίνει και για την $(x,y) \to \log(|x| + |y|)$, αφού είναι σύνθεση της προηγουμένης με την συνάρτηση $\log|_{(\varepsilon,\infty)}$.

1.6.22. Ομοιόμορφα συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις. Ανάλογα ορίζεται και η ομοιόμορφη συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση f λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$. Είναι δε αυτό ισοδύναμο με την ομοιόμορφη συνέχεια των συναρτήσεων $f_1, f_2, \ldots, f_m$. (Γιατί;)

Και βέβαια η $f : A \to \mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες σημείων x_k και y_k από το σύνολο A με $|x_k - y_k| \to 0$ έπεται ότι $|f(x_k) - f(y_k)| \to 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.6

1. Μελετήστε τα όρια: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x^2 + y^2 - 1}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2 + y^2 - 1)\pi/2]}$,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$,

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 - 1}{(x^2 + y^2)^2}$, $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$,

$x_k - y_k|$

αι η ομοιόμορφη συνέχεια

$x_n|$

$_\varepsilon$ όπου Π_ε είναι το σύνολο

$_n x_n| \le \varepsilon\}$.

$f(x,y) = \log(|x|+|y|)$, είναι

$x,y) \to |x|$ και $(x,y) \to |y|$

ρτηση $(x,y) \to |x|+|y|$ είναι

υμβαίνει και για την

ουμένης με την συνάρτηση

; **συναρτήσεις.** Ανάλογα

ανυσματικής συνάρτησης

αι ομοιόμορφα συνεχής αν

$(x) - f(y)| < \varepsilon$ για $x, y \in A$

ομοιόμορφη συνέχεια των

νεχής αν και μόνο αν για

σύνολο A με $|x_k - y_k| \to 0$

m $\dfrac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2+y^2-1)\pi/2]}$,

lim $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$,

$\dfrac{xy - z^2}{x^2+y^2+z^2}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2 - 1}{1-\cos(x^2+y^2)}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)},$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x-y)}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^4+y^4} - x^4 - y^4 - 1}{\sin^4(x^2+y^2)}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^{\exp(1/|x|)} y}{x-y},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x-y}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2+y^2}{xy}\sin(x^4+y^4)\right].$$

2. Σωστό ή λάθος; Για $\lambda > 0$, το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda/2}} = 0 \text{ αν και μόνο αν } \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z)}{|x|^\lambda + |y|^\lambda + |z|^\lambda} = 0.$$

3. Υπάρχει το όριο $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|x|^\lambda + |y|^\lambda + |z|^\lambda}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda/2}}$;

4. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 0} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0,$$

τί συμπεραίνετε για τα λ_j; Αν απλώς το ανωτέρω όριο υπάρχει, τί συμπέρασμα βγάζετε; Το ίδιο ερώτημα όταν

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x_j>0}} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{x_j}{|x|} = 0.$$

5. Αν $f(x)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση ορισμένη για $x \in \mathbb{R}^n$ και

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - c}{|x-a|} = 0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε; (Εννοείται ότι $a \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$.)

6. Αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

τί συμπέρασμα βγάζετε; Το ίδιο ερώτημα αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$$

Διατυπώστε και απαντήστε ανάλογα ερωτήματα για τρεις μεταβλητές x, y, z.

7. Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \to \infty$, είναι σωστό ότι $x_1 \to \infty$; ($n \ge 2$)

8. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(0,\dots,0)} \frac{\sqrt[m]{|x_1|^m+\cdots+|x_n|^m}}{\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}},$$

τί συμπέρασμα βγάζετε;

9. Μελετήστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2y^2+x^2y+xy^2+1}{5x^2y^2-4x^2y+3xy^2-1}, \quad \lim_{(x,y)\to\infty}\left[x^3y^2\sin\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)\right]=1,$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty}\left[x^3y\sin\left(\frac{1}{x^3y^2}\right)\right]=0, \quad \lim_{(x,y)\to\infty}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^4}.$$

10. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty}\left[x_1x_2\dots x_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\right]=0$. Γενικότερα δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} P(x_1,x_2,\dots,x_n)e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}=0,$$

για κάθε πολυώνυμο $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Και ακόμα γενικότερα, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} P(x_1,x_2,\dots,x_n)e^{-(|x_1|^{\lambda_1}+|x_2|^{\lambda_2}+\cdots+|x_n|^{\lambda_n})}=0,$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς λ_j, όσο μικροί και αν είναι.

11. Σωστό ή λάθος. Το $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ούτως ώστε για $x\in A-\{a\}$ με $|x_1-a_1|<\delta$, $|x_2-a_2|<\delta$, … ,$|x_n-a_n|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

12. Είναι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \alpha\nu \quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \alpha\nu \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

συνεχής για κάποιο a;

13. Εξετάστε κατά πόσο η συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sin(x-y)}, \quad \text{ορισμένη για } x\neq y+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}),$$

επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση σε σημεία με $x=y+k\pi$.

14. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F\subset\mathbb{R}^m$, κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο A.

15. Θεωρήστε δυο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}^m$, και ορίστε το σύνολο

$$X = \{x \in A : \exists \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ούτως ώστε} \ f(x) = \lambda g(x)\}.$$

Είναι το σύνολο X κλειστό στο A; Το ίδιο ερώτημα με το σύνολο

$$Y = \{x \in A : \exists \lambda \in [0,1] \ \text{ούτως ώστε} \ f(x) = \lambda g(x)\}.$$

16. Θεωρήστε μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x_1, \dots, x_n) = \log\left(|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n| + |\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n|\right),$$

ορισμένη πάνω στο σύνολο $\mathbb{R}^n - T_\varepsilon$, όπου T_ε είναι το σύνολο

$$T_\varepsilon = \{x : |\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n| + |\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n| \le \varepsilon\}.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Είναι η συνάρτηση

$$g(x_1, \dots, x_n) = \log\left(|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n|^2 + |\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n|^2\right)$$

ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}^2 - T_\varepsilon$;
Το ίδιο ερώτημα για την συνάρτηση

$$h(x_1, \dots, x_n) = \log\left(\sqrt{|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n|} + \sqrt[4]{|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n|}\right).$$

17. Είναι η συνάρτηση $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = \log x$, ομοιόμορφα συνεχής;

18. Σωστό ή λάθος; Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένο και οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς, το αυτό συμβαίνει και για το γινόμενό τους $fg: A \to \mathbb{R}$.

19. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$, είναι συνεχής και ως προς x και ως προς y, έπεται ότι είναι συνεχής;

1.7 Συμπαγή και συνεκτικά σύνολα

1.7.1. Ορισμός. Ένα υποσύνολο E του χώρου $\mathbb{R}^n$ λέγεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό (εννοείται στον $\mathbb{R}^n$) και φραγμένο.

Παραδείγματα. **1.** Μια κλειστή μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| \le R\}$ και ένα κλειστό ορθογώνιο $[\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n]$ είναι συμπαγή σύνολα.

2. Αν a_k είναι μια ακολουθία που συγκλίνει στο σημείο a, τότε το σύνολο

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \cup \{a\}$$

είναι συμπαγές. Και αν $a \notin \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ τότε το σύνολο $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ είναι φραγμένο αλλά δεν είναι κλειστό, οπότε δεν είναι συμπαγές.

3. Το σύνολο $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστό στο $xy-$επίπεδο αλλά δεν είναι φραγμένο και συνεπώς δεν είναι συμπαγές.