Εργασία στο μάθημα (301) Απειροστικός Λογισμός III
Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων
Θεώρημα $Green$ και εφαρμογές

Ιωάννης Σπανός
Αριθμός Μητρώου: 1112201900202
Τμήμα Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.

Ημερομηνία εξέτασης 22/01/2021
Εναλλακτικές 23/01/2021, 21/01/21, 20/01/21,
29/01/21

Περιεχόμενα

[1]

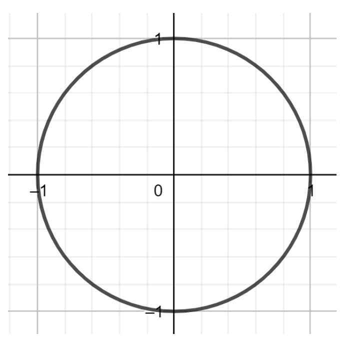
[1] Για τα σχήματα χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα *Geogebra* διαθέσιμο στο *http://www.geogebra.org*, *Copyright(C) International Geogebra Institute*, 2013.

Κεφάλαιο 1

Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

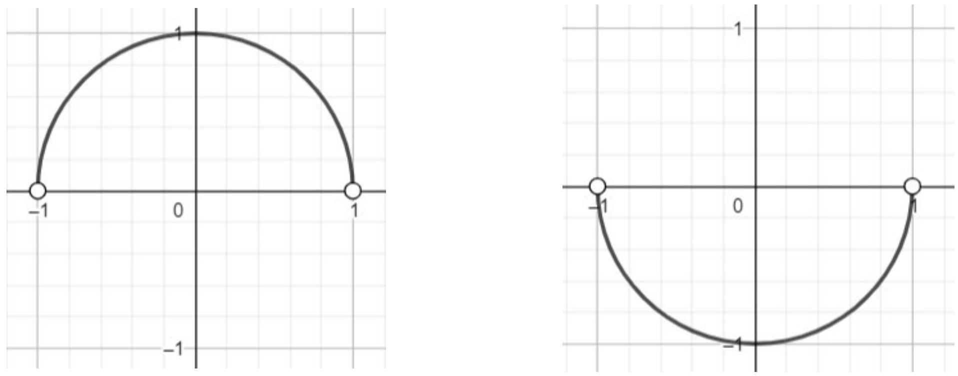
1.1 Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Πριν την διατύπωση του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, θα εξετάσουμε κάποια παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον $\mathbb{R}^2$. Πολλές φορές μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ δίνεται στη μορφή Συνόλου Στάθμης $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$ μιας $F : A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$. Μάλιστα, συνήθως η F είναι C^1. Βέβαια, κάθε καμπύλη σε αυτή τη μορφή δεν είναι απαραίτητα συνάρτηση ως προς x ή y. Για παράδειγμα θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.



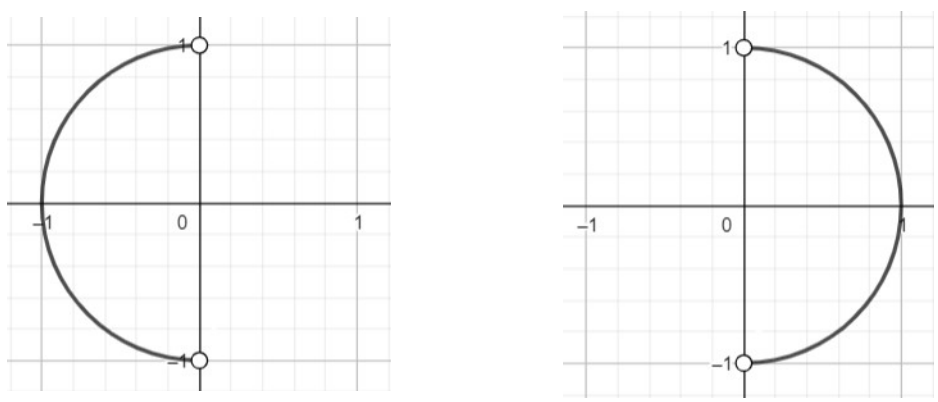
Σχήμα 1.1: Ο μοναδιαίος κύκλος.

Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος δεν είναι το γράφημα συνάρτησης ούτε ως προς x ούτε ως προς y. Όμως, αν $y \neq 0$ τα ημικύκλια $y = \sqrt{1-x^2}, x \in (-1,1)$ και $y = -\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,1)$ είναι συναρτήσεις ως προς y. Για κάθε σημείο (x_0, y_0) των ημικυκλίων παρατηρούμε ότι $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0 \neq 0$, αφού $y_0 \neq 0$.



Σχήμα 1.2: Ημικύκλια ως προς y

Όμοια, αν $x \neq 0$ τα ημικύκλια $x = \sqrt{1-x^2}, x \in (-1,1)$ και $x = -\sqrt{1-x^2}, x \in (-1,1)$ είναι συναρτήσεις ως προς x. Επίσης, για κάθε σημείο (x_0, y_0) των ημικυκλίων ισχύει $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \neq 0$, αφού $x_0 \neq 0$.



Σχήμα 1.3: Ημικύκλια ως προς x

Άρα, συμπεραίνουμε ότι για κάθε σημείο $(x, y) \in \Sigma_0$, με $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ (αντίστοιχα $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$), υπάρχει μια $\varepsilon-$περιοχή του x (αντίστοιχα του y) ώστε η F να είναι το γράφημα συνάρτησης ως προς y (αντίστοιχα ως προς x). Γενικεύοντας, έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τον $\mathbb{R}^2$)**.** *Έστω συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 και σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε*

1. *$F(x_0, y_0) = 0$ και*
2. *$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μοναδική συνάρτηση $f : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^1 με $f(x_0) = y_0$ και $F(x, f(x)) = 0$, $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης για τον $\mathbb{R}^3$)**.** *Έστω συνάρτηση* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, C^1 *και σημείο* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ *τέτοιο ώστε*

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *και*
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ *και μοναδική* $f : B((x_0, y_0), \varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^1 *με* $f(x_0, y_0) = z_0$ *και* $F(x, y, f(x, y)) = 0$, $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το γενικό Θεώρημα.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων)**.** *Έστω συνάρτηση* $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_m) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, C^1 *και το σύστημα*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}.$$

Επίσης, έστω $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ *με* $\vec{F}(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{0}$ *και*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{(\vec{a}, \vec{b})} \neq 0.$$

Τότε, υπάρχει $\vec{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, *σε περιοχή του* $\vec{a}$ *με* $\vec{\phi}(\vec{a}) = \vec{b}$ *και* $\vec{F}(x_1, \ldots, x_n, \vec{\phi}(x_1, \ldots, x_n) = \vec{0}$ *σε περιοχή του* $\vec{a}$.

Παρατηρήσεις. *1. Στο Θεώρημα 3:*

- *αν* $m = 1$ *και* $n = 1$ *προκύπτει το Θεώρημα 1*
- *αν* $m = 1$ *και* $n = 2$ *προκύπτει το Θεώρημα 2*
- *αν* $m = n$ *προκύπτει το αντίστοιχο του Θεωρήματος της Αντιστρόφου στον Λογισμό πολλών μεταβλητών.*

2. *Αν* $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{(\vec{a}, \vec{b})} = 0$ *δεν συνάγουμε συμπέρασμα. Πράγματι, ο κύκλος που εξετάσαμε παραπάνω τοπικά στα σημεία* $(\pm 1, 0)$ *και* $(0, \pm 1)$, *δηλαδή σε αυτά που ισχύει* $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, *δεν είναι το γράφημα συνάρτησης ως προς* y *ή ως προς* x *αντίστοιχα. Όμως, αν* $F(x, y) = x^3 - y^3$, *τότε* $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, *αλλά* $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, *δηλαδή το* Σ_0 *είναι το γράφημα της ευθείας* $y = x$.

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 να εξετάσετε αν η* $F(x,y,z)=0$ *με* $F(x,y,z)=x^2-4x+y^4+4y^3+6y^2+4y-z^4+z$ *είναι το γράφημα μιας* C^1 *συνάρτησης τοπικά σε κάθε ένα από τα σημεία*

1. $(0,0,1)$

2. $(0,0,0)$.

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι η F είναι C^1 ως πολυωνυμική.

1. Ισχύει $F(0,0,1)=0$ και $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,1)=-3\neq 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 2 υπάρχει $\varepsilon>0$ και μοναδική $f:B((0,0),\varepsilon)\to\mathbb{R}$, με $f(0,0)=1$ και $x^2-4x+y^4+4y^3+6y^2+4y-f^4(x,y)+f(x,y)=0$.

2. Ισχύει $F(0,0,0)=0$, όμως, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0,0)=\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,0)=\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=0$, άρα το Θεώρημα 2 δεν μας δίνει συμπέρασμα.

□

Άσκηση 2. *Να δειχθεί ότι υπάρχει* $\varepsilon>0$ *και* $f:(-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)\to\mathbb{R}$ *η οποία είναι* C^1 *με* $f(-1)=0$ *και* $x^3+f^3(x)+e^{f(x)}=0$. *Να μελετηθεί η* f *ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί η εφαπτομένη της στο* $x=-1$.

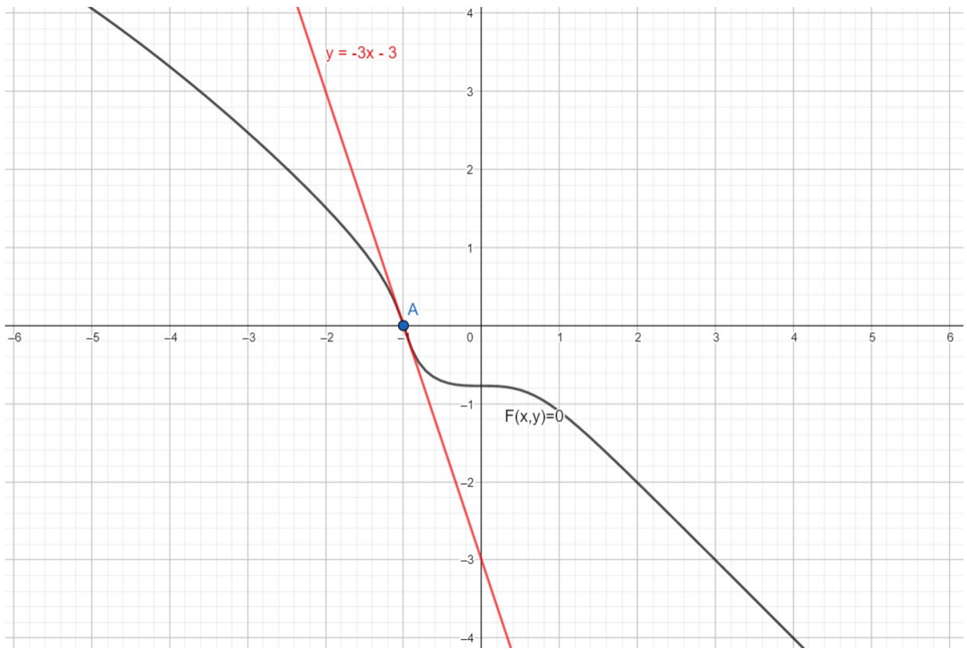
Λύση. Θέτουμε $F(x,y)=x^3+y^3+e^y$. Τότε, η F είναι C^1 και $F(-1,0)=0$. Επίσης, $\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0)=4\neq 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 υπάρχει $\varepsilon>0$ και μοναδική $f:(-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)\to\mathbb{R}$, C^1 με $f(-1)=0$ και $x^3+f^3(x)+e^{f(x)}=0$. Εφαρμόζοντας πεπλεγμένη παραγώγιση στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$3x^2+3f^2(x)f'(x)+f'(x)e^{f(x)}=0\Rightarrow f'(x)=\frac{-3x^2}{3f^2(x)+e^{f(x)}}. \tag{1.1}$$

Επειδή $f'(x)<0, \forall x\in(-1-\varepsilon,-1+\varepsilon)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, για $x=-1$ στην (1.1) έχουμε $f'(-1)=-3$. Άρα, η εφαπτομένη της f στο $x=-1$ είναι η

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y=-3x-3.$$

□



Σχήμα 1.4: Η καμπύλη της Άσκησης 2 και η εφαπτομένη της για $x = -1$

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και συναρτήσεις $f, g : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^1 με $f(1) = 0$, $g(1) = 2$ και $z^2 + f(z)g(z) - 1 = 0$, $z^2 + f^2(z) - g^2(z) + 3 = 0$. Επίσης, βρείτε τις $f'(1)$ και $g'(1)$.*

Λύση. Έστω $F_1(x,y,z) = z^2 + xy - 1$, $F_2(x,y,z) = z^2 + x^2 - y^2 + 3$ και $\vec{F} = (F_1, F_2)$. Τότε, η $\vec{F}$ είναι C^1 και $\vec{F}(0,2,1) = (0,0)$. Επίσης, $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,2,1)} = -8 \neq 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3, υπάρχει $\varepsilon > 0$ και συναρτήσεις $f, g : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^1 με $f(1) = 0$, $g(1) = 2$ και $z^2 + f(z)g(z) - 1 = 0$, $z^2 + f^2(z) - g^2(z) + 3 = 0$.Με πεπλεγμένη παραγώγιση στις προηγούμενες σχέσεις έχουμε $2z + f'(z)g(z) + f(z)g'(z) = 0$ και $2z + 2f(z)f'(z) - 2g(z)g'(z) = 0$. Θέτοντας στις παραπάνω $z = 1$ έπεται $2 + 2f'(1) = 0$ και $2 - 4g'(1) = 0$. Συνεπώς, $f'(1) = -1$ και $g'(1) = \frac{1}{2}$.

□

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα του *Green* και εφαρμογές

2.1 Θεώρημα του *Green*

Το Θεώρημα του *Green* αφορά τον $\mathbb{R}^2$. Πριν το διατυπώσουμε, θα ορίσουμε τα σύνολα στα οποία εφαρμόζεται.

Ορισμός 1. *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$.*

1. *Το D λέγεται σύνολο Green αν το σύνορό του ∂D είναι απλή, κλειστή, C^1 (ή κατά τμήματα C^1) και λεία καμπύλη.*

2. *Το D λέγεται στοιχειώδες σύνολο Green αν το σύνορό του ∂D ορίζεται από τουλάχιστον δύο απλές, κλειστές, C^1 (ή κατά τμήματα C^1) και λείες καμπύλες.*

Θεώρημα 1 (Θεώρημα *Green*)**.** *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ σύνολο Green και $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$, με $\vec{F} = (P, Q)$, C^1 συνάρτηση. Τότε,*

$$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

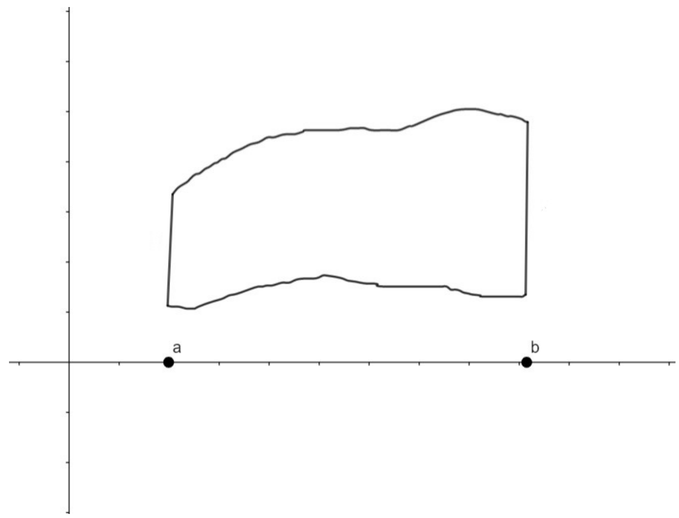
Αν $\vec{T} = \frac{r'(t)}{\|\vec{r(t)}\|}$, τότε η διανυσματική μορφή του Θεωρήματος Green είναι

$$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot \vec{T} dS = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dxdy.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα.

1. Έστω $\vec{F_1} = (P, 0)$ και $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ $x-$απλό σύνολο. Το D περικλείεται στις καμπύλες $\Gamma_1 : \vec{r_1}(t) = (t, \phi_1(t), t \in [a, b]$

$\Gamma_2 : \vec{r_2}(t) = (b, t), t \in [\phi_1(b), \phi_2(b)]$
$\Gamma_3 : \vec{r_3}(t) = (a + b - t, \phi_2(a + b - t)), t \in [a, b]$
$\Gamma_4 : \vec{r_4}(t) = (a, \phi_1(a) + \phi_2(a) - t), t \in [\phi_1(a), \phi_2(a)]$.



Σχήμα 2.1: Σύνολο D

Υπολογίζουμε,
$I_1 = \int_{\Gamma_1} \vec{F} d\vec{r_1} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r_1}(t))(\vec{r_1})'(t)dt = \int_a^b P(t, \phi_1(t))dt$
$I_2 = \int_{\Gamma_2} \vec{F} d\vec{r_2} = \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} \vec{F}(\vec{r_2}(t))(\vec{r_2})'(t)dt = 0$
$I_3 = \int_{\Gamma_3} \vec{F} d\vec{r_3} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r_3}(t))(\vec{r_3})'(t)dt = -\int_a^b P(a + b - t, \phi_2(a + b - t))dt$
$I_4 = \int_{\Gamma_4} \vec{F} d\vec{r_4} = \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} \vec{F}(\vec{r_4}(t))(\vec{r_4})'(t)dt = 0$.
Άρα,
$\int_{(\partial D)^+} (P, 0)d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int_a^b [P(t, \phi_1(t)) - P(t, \phi_2(t))]dt$. Επίσης, $-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b (\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy)dx = \int_a^b [P(t, \phi_1(t)) - P(t, \phi_2(t))]dt$.
Συνεπώς, $\int_{(\partial D)^+} (P, 0)d\vec{r} = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$.

2. Αν το D είναι y-απλό, όμοια δείχνουμε ότι $\int_{(\partial D)^+} (0, Q)d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.

3. Έστω ότι το D είναι απλό[1] σύνολο. Εφαρμόζοντας τα βήματα 1. και 2. έχουμε το ζητούμενο.

□

Σχόλιο. *Η απόδειξη για σύνολα που δεν είναι απλά, αλλά είναι στοιχειώδη σύνολα Green, γίνεται με χωρισμό των συνόλων σε απλά σύνολα.*

[1] δηλαδή, x-απλό και y-απλό

2.2 Εφαρμογές του Θεωρήματος *Green*

1. Το Θεώρημα 1 συνδέει το επικαμπύλιο με το διπλό ολοκλήρωμα. Δηλαδή, αν μας δοθεί ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (και ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1) για να το υπολογίσουμε μπορούμε να αναχθούμε στο αντίστοιχο διπλό και αντίστροφα. Συγκεκριμένα, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν ενός χωρίου D μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1 για μια συνάρτηση $\vec{F} = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ με $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Παραδείγματα τέτοιων $\vec{F}$ είναι $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$ ή $(-y,0)$ ή $(0,x)$.

2. Με χρήση του Θεωρήματος 1 απόδεικνύεται το ακόλουθο

   Θεώρημα 2 (Θεώρημα απόκλισης του *Green*)**.** *Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ στοιχειώδες σύνολο Green και $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$, με $\vec{F} = (P,Q)$, C^1 συνάρτηση. Τότε,*
   $$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_D \mathrm{div}\vec{F} dxdy,$$
   όπου αν $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ παραμέτρηση του ∂D τότε $\vec{N}(t) = \frac{(y'(t),-x'(t))}{\|(\vec{r})'(t)\|}$ και $\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

   Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $\vec{F_1} = (-Q,P)$, η οποία είναι επίσης C^1. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 για την $\vec{F_1}$ έχουμε $\int_{(\partial D)^+} \vec{F_1} \cdot \vec{T} dS = \iint_D (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y}) dxdy$. Όμως,
   $\vec{F_1} \cdot \vec{T} = \frac{(-Q,P)\cdot(x'(t),y'(t))}{\|(\vec{r})'(t)\|} = \vec{F} \cdot \vec{N}$ και
   $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \mathrm{div}\vec{F}$. Συνεπώς, έχουμε το ζητούμενο. □

2.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1. *Να βρεθεί το $\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r}$, όπου $\vec{F}(x,y) = (2x^3 - y^3, x^3 + y^3)$ και $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

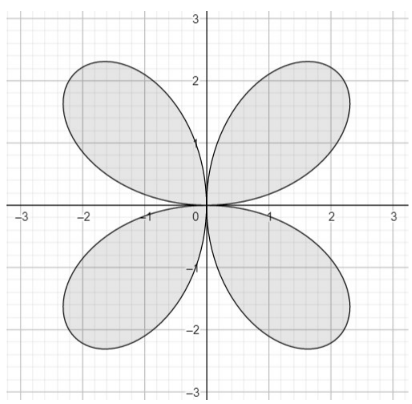
Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1 έχουμε
$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D (\frac{\partial(x^3+y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^3-y^3)}{\partial y}) dxdy = \iint_D 3x^2 + 3y^2 dxdy = I$. Θέτουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ με $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Άρα, αν $D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, τότε
$I = \iint_{D^*} 3r^3 drd\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 drd\theta = \frac{3\pi}{2}$. Τελικά, $\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$. □

Άσκηση 2. *Υπολογίστε το $\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r}$, όπου $\vec{F}(x,y) = (y^2 + x^3, x^4)$ και $D = [0,1] \times [0,1]$.*

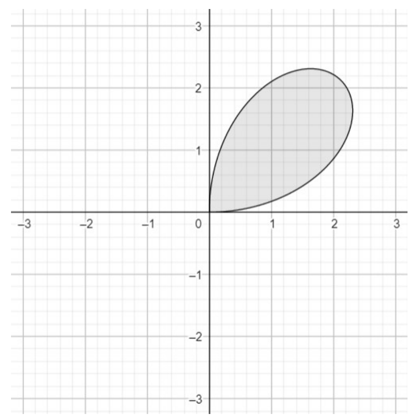
Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1
$\int_{(\partial D)^+} \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \frac{\partial x^4}{\partial x} - \frac{(y^2+x^3)}{\partial y} dxdy = \int_0^1\int_0^1 4x^3 - 2ydxdy = 0$. □

Άσκηση 3. *Να βρεθεί, με χρήση του Θεωρήματος 1, το εμβαδόν της* $r = 3\sin 2\theta$, *για* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Λύση. Έστω D το ζητούμενο χωρίο. Θεωρούμε τη παραμέτρηση της καμπύλης, $r(\vec{\theta}) = (3\sin 2\theta \cos\theta, 3\sin 2\theta \sin\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, και τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y) = (\frac{-y}{2}, \frac{x}{2})$. Τότε,
$(\vec{r})'(\theta) = (6\cos 2\theta \cos\theta - 3\sin 2\theta \sin\theta, 6\cos 2\theta \sin\theta + 3\sin 2\theta \cos\theta)$ και $\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = (\frac{-3\sin 2\theta \sin\theta}{2}, \frac{3\sin 2\theta \cos\theta}{2})$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1
$A(D) = \iint_D 1 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot (\vec{r})'(\theta) d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta)^2 d\theta = \frac{9\pi}{8}$. □



(α′) Το χωρίο που περιέχεται στη καμπύλη της Άσκησης 3 για $\theta \in [0, 2\pi]$



(β′) Το χωρίο του οποίου το εμβαδόν υπολογίσαμε στην Άσκηση 3

Σχήμα 2.2: Άσκηση 3

Βιβλιογραφία

[1] *Marsden, J.E., Tromba, A.J*: Διανυσματικός Λογισμός, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 3η Έκδοση, 2019

[2] Χατζηαφράτης Τ.Ε.: Απειροστικός Λογισμός σε πολλές μεταβλητές, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009