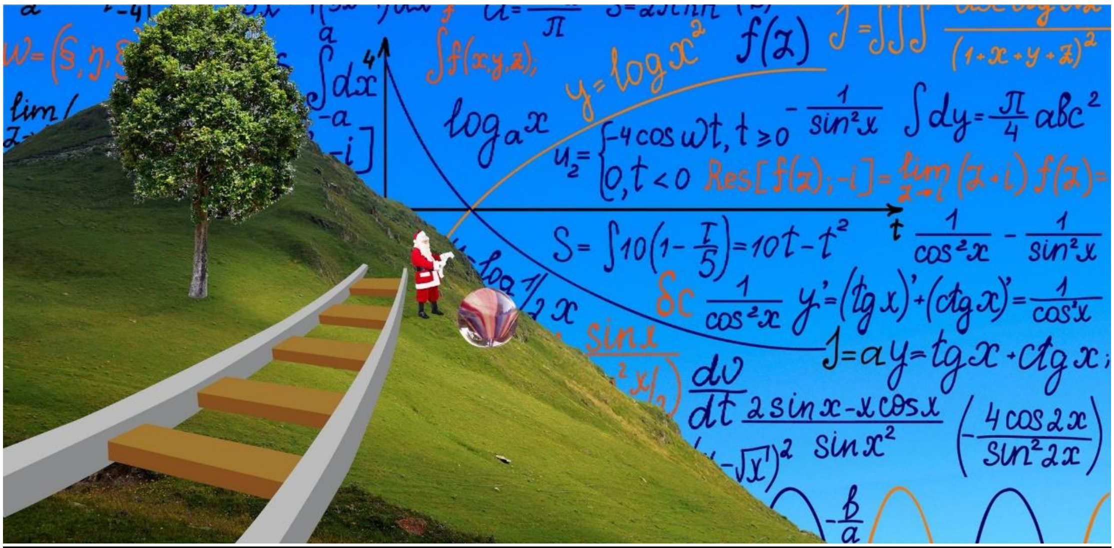
ΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΙΙ



ΕΝΟΤΗΤΑ Α – Διαφορισιμότητα

ΕΝΟΤΗΤΑ Β – Θεώρημα Green

Συμμετέχοντες φοιτητές:

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Μητρώου
Καραδής Αντώνιος	1112201400371
Πολυχρονίδης Βασίλειος	1112200222438
Σανταμούρης Μιχαήλ	1112200500265
Σπανός Βασίλειος	1112201300350

Επιθυμητή ημερομηνία εξέτασης 2/2/2021

ΑΘΗΝΑ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2021

ΕΝΟΤΗΤΑ Α (ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ)

1) ΘΕΩΡΙΑ

Α) Διαφορίσιμη Συνάρτηση

$Έστω\ f\colon I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad I\ ανοιχτό\ και\ \vec{x}_0 \in I.$
$Θα\ λέμε\ ότι\ η\ f\ διαφορίσιμη\ στο\ \vec{x}_0\ εάν\ υπάρχει\ T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\ γραμμική$
$απεικόνιση\ τέτοια\ ώστε:$
$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - T(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\vec{x}-\vec{x}_0} = 0.\ Η\ T = f'\ καλείται\ παράγωγος\ της\ f$
$στο\ x_0.$

Β) Μερική Παράγωγος Συνάρτησης

$Έστω\ f\colon I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad I\ ανοιχτό\ και\ \vec{x}_0 \in I, i \in \{1, \ldots n\}$
$Θα\ λέμε\ ότι\ η\ f\ είναι\ μερικώς\ παραγωγίσιμη\ ως\ προς\ x_i\ στο\ \vec{x}_0\ εάν\ υπάρχει\ το:$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\cdot e_i) - f(\vec{x}_0)}{h}, το\ οποίο\ καλείται\ μερικής\ παράγωγος\ της\ f\ ως$
$προς\ x_i\ και\ θα\ συμβολίζεται\ με\ \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}$ ή $f_{x_i}(\vec{x}_0)$

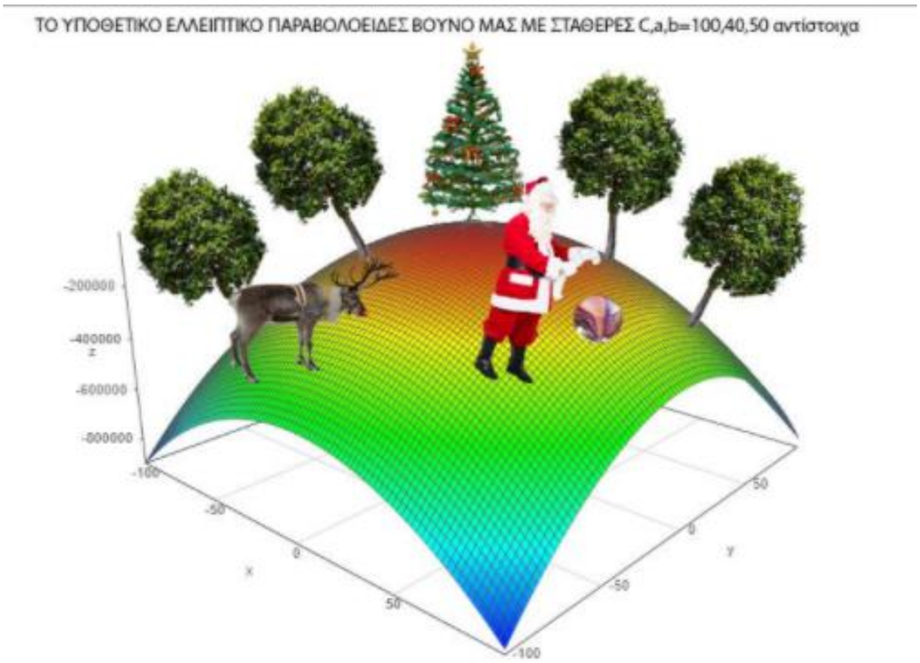
Γ) Κλίση της f-Ανάδελτα

$Έστω\ f\colon I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad I\ ανοιχτό\ και\ \vec{x}_0 \in I\ ώστε\ υπάρχουν\ οι\ μερικοί$
$παράγωγοι\ πρώτης\ τάξης\ της\ f\ στο\ \vec{x}_0, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}. Τότε\ την\ παράγωγο$
$της\ f\ στο\ \vec{x}_0\ δηλαδή\ το\ διάνυσμα\ f'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_n}\right)$
$την\ ονομάζουμε\ κλίση\ \ (ή\ ανάδελτα)\ της\ f\ στο\ \vec{x}_0. Την\ συμβολίζουμε\ με\ \nabla f(\vec{x}_0).$

2) ΑΣΚΗΣΗ

Υποθέτουμε ότι ένα βουνό έχει το σχήμα του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = c - a^2x - b^2y$ όπου *a,b* και c είναι θετικές σταθερές, x και y οι γεωγραφικές συντεταγμένες (ανατολή-δύση, βορράς-νότος αντίστοιχα), και z είναι το υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας (τα *x,y,z* μετριούνται όλα σε μέτρα). Στο σημείο (1,1), σε ποια διεύθυνση αυξάνει γρηγορότερα το υψόμετρο; **i)** Αν ο Άγιος Βασίλης άφηνε έναν βόλο στο (1,1), σε ποια διεύθυνση θα άρχιζε να κατρακυλάει; **ii)** Στο υποθετικό βουνό μας, αφού ο τάρανδος του Άη Βασίλη κουράστηκε, ένας μηχανικός ήθελε να τον βοηθήσει με το να φτιάξει μία σιδηροδρομική γραμμή. Η κλίση απευθείας προς την κορυφή του βουνού είναι πολύ μεγάλη για τη δύναμη των μηχανών του τραίνου. Στο σημείο (1,1), προς ποιες διευθύνσεις πρέπει να στρωθεί η γραμμή, ώστε να ανεβαίνει με κλίση 3% , δηλαδή η κλίση να έχει εφαπτομένη 0,03; (Υπάρχουν δύο δυνατότητες). Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα στο οποίο να φαίνονται οι δύο δυνατές διευθύνσεις για κλίση 3% στο (1,1)

<u>ΛΥΣΗ</u>



$z = c - ax^2 - by^2$

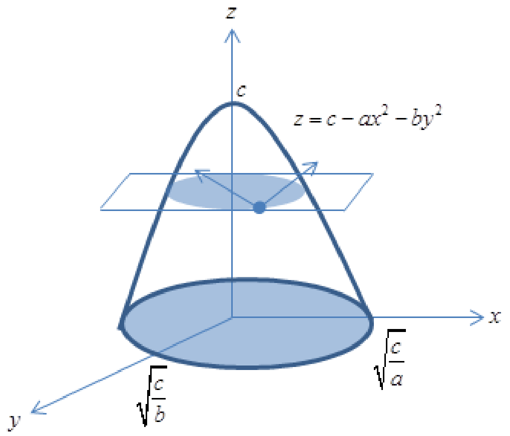
$z = f(x,y) = c - ax^2 - by^2$

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-2ax, -2by)$

Στο $(x,y) = (1,1)$ η $f(x,y)$ αυξάνεται περισσότερο στην κατεύθυνση

$\nabla f(1,1) = (-2a, -2b)$

Ο βώλος θα κυλήσει στην κατεύθυνση του $(2\alpha, 2b)$. Δηλαδή στην κατεύθυνση $-\nabla f(1,1)$, καθώς είναι η κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης.



Έστω $\vec{u}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στο $xy-$ επίπεδο, όπου:

$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \qquad (1)$

$\nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(x,y)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$.

$\nabla f(1,1) = (-2a, -2b)$ $\mu\varepsilon\ \alpha > 0, \beta > 0$. Εάν $r = 0{,}03$, τότε:
$\nabla f(1,1) \cdot (x, y) = r \Leftrightarrow -2ax - 2by = 0{,}03 = r \Leftrightarrow$
$$ax + by = -\frac{r}{2} \qquad (2)$$
$$ax + \frac{r}{2} = -by \Leftrightarrow \left(ax + \frac{r}{2}\right)^2 = b^2y^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} a^2x^2 + arx + \frac{r^2}{4} = b^2(1 - x^2) \Rightarrow$$
$$a^2x^2 + arx + \frac{r^2}{4} - b^2 + b^2x^2 = 0 \Rightarrow (a^2 + b^2)x^2 + arx + \frac{r^2}{4} - b^2 = 0 \qquad (3)$$

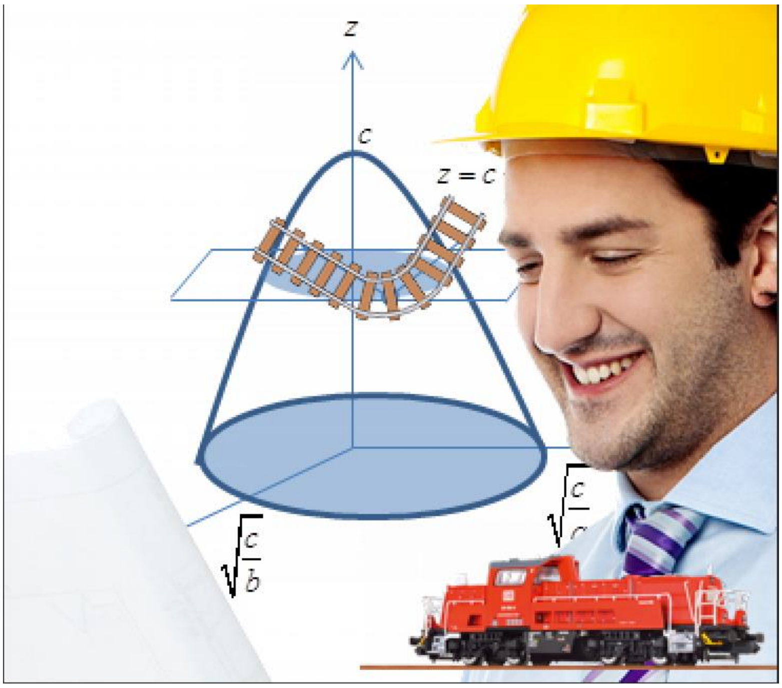
Παίρνουμε την διακρίνουσα:

$$\Delta = a^2r^2 - 4 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{r^2}{4} - b^2\right) > 0 \Leftrightarrow a^2r^2 > (a^2 + b^2) \cdot (r^2 - 4b^2) \Leftrightarrow$$
$$a^2r^2 > a^2r^2 - 4a^2b^2 + b^2r^2 - 4b^4 \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 > r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > \frac{r^2}{4}$$
Το οποίο ισχύει για r=0,03 κι ένα λογικό μέγεθος βουνού (τιμές των *a,b*).

Για $r = 0{,}03$ η (3) γράφεται:
$$(a^2 + b^2)x^2 + 0{,}03ax + \frac{0{,}03^2}{4} - b^2 = 0$$

Από τη (2) έχουμε:

$$ax + by = -\frac{r}{2} \Rightarrow y = \frac{-\frac{r}{2} - ax}{b} \Rightarrow y = -\frac{r + 2ax}{2b}$$
Οπότε οι ζητούμενες κατευθύνσεις είναι οι:
$\left(x_1, -\frac{0{,}03 + 2ax}{2b}\right)$ $\kappa\alpha\iota$ $\left(x_2, -\frac{0{,}03 + 2ax}{2b}\right)$, όπου x_1, x_2 οι λύσεις της
$$(a^2 + b^2)x^2 + 0{,}03ax + \frac{0{,}03^2}{4} - b^2 = 0$$



ΕΝΟΤΗΤΑ Β (GREEN)

1) ΘΕΩΡΙΑ

Αρχικά να επισημάνουμε ότι το θεώρημα Green, με το οποίο θ' ασχοληθούμε στη συνέχεια, αναφέρεται αποκλειστικά στα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Α) Σύνολο Green

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε το σύνορο του dD να είναι μια απλή, κλειστή, C^1 (ή κατά τμήματα C^1), λεία καμπύλη Γ. Το D καλείται Σύνολο Green.

Β) Στοιχειώδες Σύνολο Green

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε το σύνορο του dD να είναι απλές, πεπερασμένες το πλήθος, κλειστές, C^1 (ή κατά τμήματα C^1), λείες καμπύλες Γ_k $(k \geq 2)$.
Το D καλείται Στοιχειώδες Σύνολο Green.

Γ) Θεώρημα Green

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$, ένα σύνολο Green.
Τότε εάν $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$ $με$ $\vec{F} = (P, Q)$, C^1 διανυσματικο πεδίο. Τότε:

$$\oint_{dD^+} \vec{F} \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \Leftrightarrow \oint_{dD^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

2) ΑΣΚΗΣΗ

Έστω οι συναρτήσεις:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y - 1}{(x - 3)^2 + (y - 1)^2} \quad και$$

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x - 3}{(x - 3)^2 + (y - 1)^2}$$

Να βρεθούν όλες οι πιθανές τιμές του επικαμπυλίου ολοκληρώματος:

$$I = \oint_{\Gamma^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

όπου Γ είναι απλή, κλειστή, λεία, C^1 καμπύλη της οποίας η τροχιά περιέχεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (3,1)\}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (3,1)\} \to \mathbb{R}^2$ το οποίο είναι C^1 εφόσον P, Q είναι C^1.

$$Οπότε: I = \oint_{\Gamma^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot dr$$

Θεωρούμε τις:

$$P_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q_1 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$P_2(x,y) = -\frac{y-1}{(x-3)^2+(y-1)^2}, \qquad Q_2 = \frac{x-3}{(x-3)^2+(y-1)^2}.$$

Τότε προφανώς:
$P = P_1 + P_2 \ \ και \ \ Q = Q_1 + Q_2$

Επίσης:

$\vec{F}(x,y) = \vec{F}_1(x,y) + \vec{F}_2(x,y)$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0),(3,1)\}$, όπου:

$$\vec{F}_1(x,y) = \big(P_1(x,y), Q_1(x,y)\big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$
$$\vec{F}_2(x,y) = \big(P_2(x,y), Q_2(x,y)\big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(3,1)\}$$

Προφανώς $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι C^1 εφόσον P_1, Q_1 και P_2, Q_2 είναι C^1.

Άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι το ολοκλήρωμα που ψάχνουμε:

$$I = \oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot dr = \oint_{\Gamma^+} \vec{F}_1 \cdot dr + \oint_{\Gamma^+} \vec{F}_2 \cdot dr =$$

$$\oint_{\Gamma^+} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy + \oint_{\Gamma^+} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy$$

Παρατηρούμε ότι:

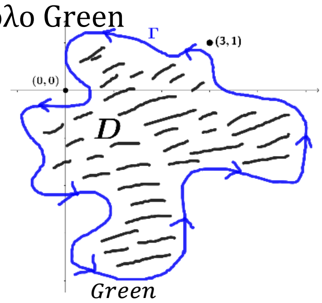
$\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι αστρόβιλα. Πράγματι:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} \ \ εάν \ (x,y) \in \ \mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \qquad (1)$$
$$\frac{\partial P_2}{\partial y} = \frac{(y-1)^2-(x-3)^2}{[(x-3)^2+(y-1)^2]^2} = \frac{\partial Q_2}{\partial x} \ \ εάν \ (x,y) \in \ \mathbb{R}^2 \backslash (3,1) \qquad (2)$$

<u>Διακρίνουμε περιπτώσεις:</u>

α) Η Γ δεν περιέχει στο εσωτερικό της κάποιο από τα (0,0), (3,1).

Έστω D το σύνολο που περικλείει η Γ. Το D είναι σύνολο Green
Θα εφαρμόσουμε Green στο D.



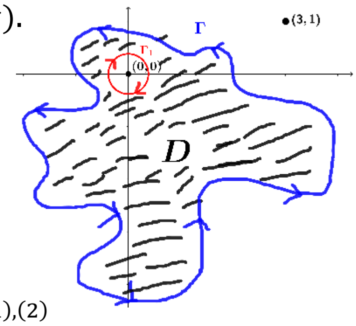
Έχουμε:

$$I = \oint_{\Gamma^+} \vec{F}_1 \cdot dr + \oint_{\Gamma^+} \vec{F}_2 \cdot dr =$$

$$= \oint_{\Gamma^+} P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy + \oint_{\Gamma^+} P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy \ \ \overbrace{=}^{Green}$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dxdy + \iint_D \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y}\right) dxdy \overset{(1),(2)}{\triangleq} 0 + 0 = 0$$

β) Έστω ότι η Γ περιέχει στο εσωτερικό της το (0,0). Έστω $Γ_1$ κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα r>0 τέτοια ώστε ο κύκλος να βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης Γ. Θεωρούμε τον κύκλο με τη συνήθη παραμέτρηση:
$\vec{\gamma}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \; \mu\varepsilon \; \vec{\gamma}(t) = r(cost, sint) = (rcost, rsint).$



Έστω D το σύνολο του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης Γ και του κύκλου $Γ_1$.
Το D είναι στοιχειώδες σύνολο Green.
Θα εφαρμόσουμε Green στο D.
Έχουμε:

$$I = \oint_{dD} \vec{F} \cdot dr \overset{Green}{\triangleq} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \Longrightarrow \oint_{dD} \vec{F} \cdot dr \overset{(1),(2)}{\triangleq} 0 \Longrightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot dr + \oint_{\Gamma_1^-} \vec{F} \cdot dr = 0 \Longrightarrow \oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot dr - \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot dr = 0 \Longrightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F} \cdot dr = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot dr = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F_1} \cdot dr + \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F_2} \cdot dr \qquad (3)$$

Έχουμε ότι $\oint_{\Gamma_1^+} \vec{F_2} \cdot dr = 0 \quad (4)$

($\vec{F_2}$ συντηρητικό, εφόσον $\vec{F_2}$ αστρόβιλο, C^1 και D στοιχειώδες σύνολο Green άρα μπορεί να εφαρμοστεί Green)

Όμως $\vec{F_1}$ όχι συντηρητικό, αφού δεν είναι C^1 συνεπώς $\oint_{\Gamma_1^+} \vec{F_1} \cdot dr \neq 0.$ Άρα:

$$\oint_{\Gamma_1^+} \vec{F_1} \cdot dr = \int_0^{2\pi} \vec{F_1}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(P_1(\vec{\gamma}(t)), Q_1(\vec{\gamma}(t))\right) \cdot (-rsint, rcost) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} P_1(rcost, rsint) \cdot (-rsint) + Q_1(rcost, rsint) \cdot rcost \; dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-rsint}{(rcost)^2 + (rsint)^2} \cdot (-rsint) + \frac{rcost}{(rcost)^2 + (rsint)^2} \cdot (rcost) \; dt =$$

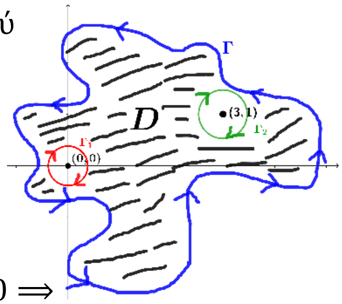
$$\int_0^{2\pi} (sint)^2 + (cost)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \quad (5)$$

Από (3), (4), (5) έπεται ότι $I = 0 + 2\pi = 2\pi$

Όμοια δείχνουμε ότι I = 2π αν η Γ περιέχει μόνο το (3,1). Όπως είδαμε δεν έχει σημασία η ακτίνα αφού το ολοκλήρωμα τελικά είναι ανεξάρτητο αυτής.

γ) Έστω ότι η Γ περιέχει στο εσωτερικό της το (0,0) και το (3,1). Έστω Γ_1,Γ_2 κύκλοι με κέντρα τα (0,0) και (3,1) και ακτίνες r_1,r_2 αντίστοιχα τέτοιες ώστε να βρίσκονται εντός της Γ και να μην τέμνονται μεταξύ τους.
Θεωρούμε τις αντίστοιχες παραμετρήσεις:
$\vec{\gamma}_1: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ \mu\varepsilon\ \vec{\gamma}_1(t) = r_1(cost, sint) = (r_1cost, r_1sint)$
$\vec{\gamma}_2: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ \mu\varepsilon\ \vec{\gamma}_2(t) = r_2(cost, sint) = (r_2cost, r_2sint)$

Έστω D το σύνολο του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης Γ και των κύκλων Γ_1 και Γ_2.
Το D είναι στοιχειώδες σύνολο Green.
Θα εφαρμόσουμε Green στο D.
Έχουμε:



$$\oint_{dD} \vec{F}\cdot dr \overset{Green}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \Rightarrow \oint_{dD} \vec{F}\cdot dr \overset{(1),(2)}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot dr + \oint_{\Gamma_1^-} \vec{F}\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^-} \vec{F}\cdot dr = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot dr - \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}\cdot dr - \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}\cdot dr = 0 \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot dr = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}\cdot dr \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot dr = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_2\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_2\cdot dr$$

Στο (**β**) δείξαμε ήδη ότι εάν η Γ περιέχει στο εσωτερικό της το (0,0) τότε:

$$\oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_2\cdot dr = 2\pi$$

Όμοια δείχνουμε ότι εάν η Γ περιέχει στο εσωτερικό της το (3,1), τότε:

$$\oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_2\cdot dr = 2\pi$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι εάν η Γ περιέχει και το (0,0) και το (3,1) τότε:

$$I = \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_1^+} \vec{F}_2\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_1\cdot dr + \oint_{\Gamma_2^+} \vec{F}_2\cdot dr = 2\pi + 2\pi = 4\pi$$

Τελικά οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει το

$$I = \oint_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad \text{είναι:}$$

0, 2π, 4π ανάλογα αν η Γ περιέχει στο εσωτερικό της κανένα, ακριβώς ένα ή και τα δύο σημεία αντίστοιχα.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1) Jerold E. Mardsen - Antony J. Tromba Διανυσματικός λογισμός

2) Tom M. Apostol Calculus, Vol. 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability

3) Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙΙ Ε.Κ.Π.Α. Χειμερινό εξάμηνο 2020-2021