1ο μάθημα
9/10/2020

Κεφ. 01 Ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ ($n\geq 1$)

$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$

$\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{x}=\vec{y} \Leftrightarrow x_1=y_1,\ x_2=y_2,\dots,x_n=y_n$

$\vec{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

Πρόσθεση: $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$

Βαθμ. Πολ: $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\in\mathbb{R}^n$

$\langle \mathbb{R}^n,+,\cdot\rangle$ έχει τη δομή ενός διανυσματικού/γραμμικού χώρου (δ.χ.) με διάσταση n.

Ορθοκανονική βάση $\vec{e_1}=(1,0,\dots,0),\dots,\vec{e_n}=(0,0,\dots,0,1)$

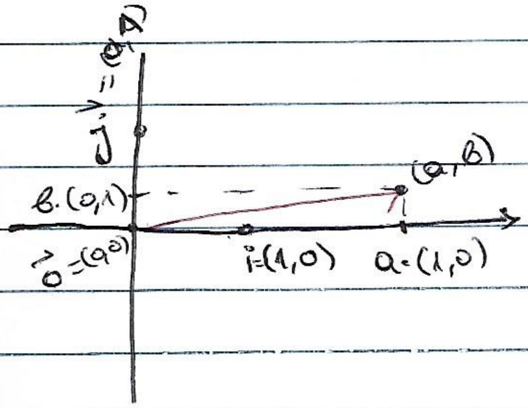
$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+\dots+x_n\vec{e_n}$

$\vec{x}$ διάνυσμα ή σημείο του $\mathbb{R}^n$, x_i i-συντεταγμένη

όλες οι ακολ. συγκλίνουν

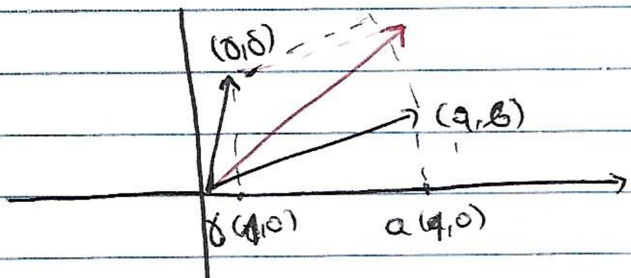
- Για $n=1$, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R} \rightsquigarrow$ ολικά διατετ., πλήρες σώμα
- Για $n=2$, $\mathbb{R}^2=\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$, $\vec{e_1}=(1,0)=\vec{i}$, $\vec{e_2}=(0,1)=\vec{j}$

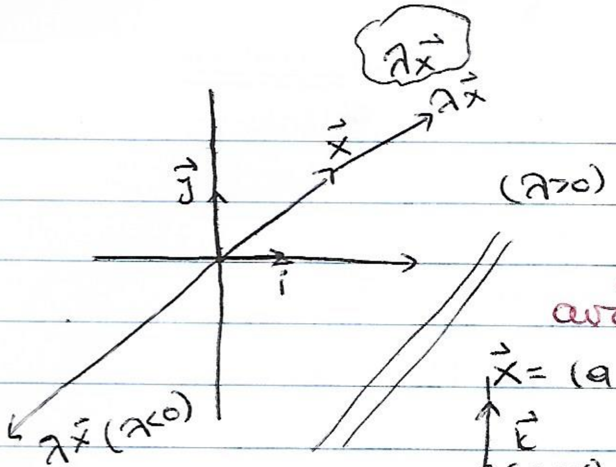
Ταύτιση $\mathbb{R}^2$ με επίπεδο



$\vec{x}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$

$\vec{y}=(\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^2$,

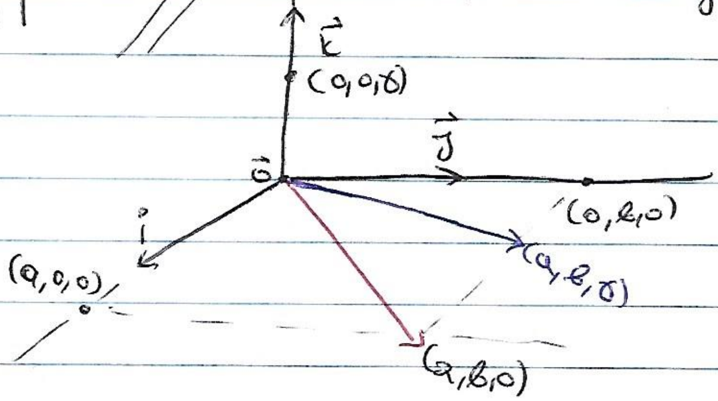




(n=3)

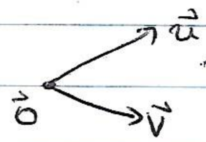
αντίστοιχα για τον $\mathbb{R}^3$ έχουμε

$\vec{x} = (a, b, \gamma) = a\vec{i} + b\vec{j} + \gamma\vec{k}$, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$



Παρατήρηση

Εάν έχουμε $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, γρ. ανεξάρτητα τότε ορίζουμε ένα επίπεδο (z^*)



→ ορίζουν επίπεδο στον $\mathbb{R}^2$.

Εσωτερικό γινόμενο στον δ.χ. $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

Εσωτερικό γινόμενο των $\vec{x}, \vec{y}$

Ιδιότητες

(i) $\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$

$\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}$

(ii) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (Μεταθετική)

(iii) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z}$, $\vec{z}\in\mathbb{R}^n$

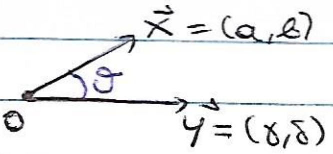
(iv) $(\lambda\vec{x})\cdot\vec{y} = \lambda\cdot(\vec{x}\cdot\vec{y})$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\boxed{\text{Άλλοι συμβολισμοί: } \langle\vec{x},\vec{y}\rangle,\ (\vec{x},\vec{y})}$

Για $n=1$ $x\cdot y =$ συνήθως πολ. 2 πραγμ. αριθμών $x,y\in\mathbb{R}$

! Γνωρίζαμε (από το σχολείο) το εξής: $(*)$

2 διαν. του επιπέδου $\vec{x}=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, $\vec{y}=(\gamma,\delta)\neq(0,0)$



$0\leq\theta\leq\pi$

$\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ ΛΑΘΟΣ

$\vec{x}\cdot\vec{y} \overset{(*)}{=} \left(|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2|\vec{x}||\vec{y}|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\right)$ ② όπου $|x| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (μέτρο)

Ερωτήματα; : Έχει το (δικό μας) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\alpha\gamma+\beta\delta$ ① σχέση με τα μέτρα των $\vec{x},\vec{y}$; Αν ναι, ποιά; Τελικά ταυτίζονται οι ορισμοί; Ποιοι είναι οι ορισμοί; → οι ① και ②

Μέτρο/Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ (δ.χ. με εσωτ. γινόμενο)

υποθέτουμε $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} \geq 0$$

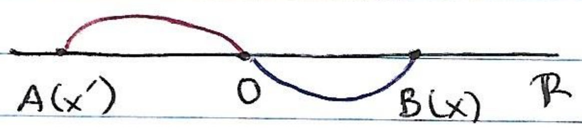
ΑΣΚΗΣΗ $\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \leq \|\vec{x}\| \leq \sqrt{n}\cdot\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$

$(\leq n\cdot\max\{|x_1|,\dots,|x_n|\})$

↳ Γεωμετρική Ερμηνεία $\Longrightarrow$

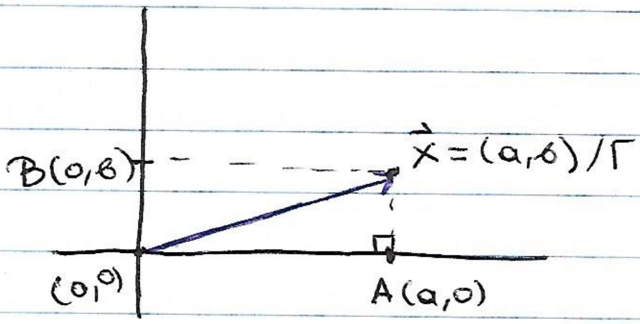
Γεωμετρικά $\|\cdot\|$

- $n=1$, $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ η Απόλυτος Τιμή



$|x|$ = απόσταση του σημείου από την Αρχή (0)

- $n=2$, $\vec{x} = (a, b)$



ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

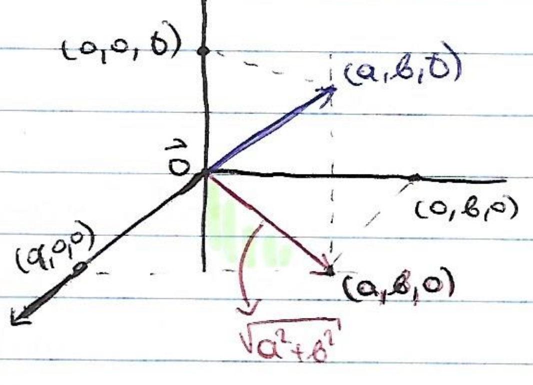
$(OA)^2 = (AΓ)^2 + (OA)^2$ Νόρμα του (a,b)

$(OA)^2 = |b|^2 + |a|^2$

$(OA) = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a,b)\|$

$\|\vec{x}\|$ = απόσταση του $\vec{x}$ από την Αρχή $(\vec{0})$

- $n=3$,



$\|(a,b,b)\|$ = απόσταση του (a,b,b) από την Αρχή $(\vec{0})$

Ορίσαμε λοιπόν $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$ (≥ 0)

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\quad |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

$\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ Ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow$ $\vec{x}, \vec{y}$ είναι γρ. εξαρτημένα

Απόδ. Εάν $\vec{x} = \vec{0}$ (ή $\vec{y} = \vec{0}$) ισχύει το "="

Έστω $\vec{x} \neq \vec{0}$

Παίρνουμε $t \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g(t) = (t\vec{x} + \vec{y}) \cdot (t\vec{x} + \vec{y}) \geq 0 \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$g(t) = t^2 (\vec{x}\cdot\vec{x}) + (\vec{y}\cdot\vec{y}) + 2t(\vec{x}\cdot\vec{y}) =$$

$$= t^2 \cdot \|\vec{x}\|^2 + 2t(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ και}$$

Αυτό είναι πολυώνυμο!

$\|\vec{x}\| > 0$ $(\vec{x} \neq 0)$

Πρέπει $\Delta \leq 0$: $4(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Ισότης: $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, $\Delta = 0$, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$: $g(t_0) = 0$.

δηλ. $(t_0\vec{x} + \vec{y}) \cdot (t_0\vec{x} + \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow$

$t_0\vec{x} + \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\exists\, t'$: $\vec{y} = t'\vec{x}$ $\leadsto$ το $\vec{y}$ είναι γρ. εξαρτ. του $\vec{x}$.

Ιδιότητες:

$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

(i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ / $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(ii) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (θετικά ομογενής)

(iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Τριγωνική)

Αποδ. (i), (ii) εύκολα

iii) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y}) \circ (\vec{x}+\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2(\vec{x} \circ \vec{y})$

$\overset{C\text{-}S}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 =$

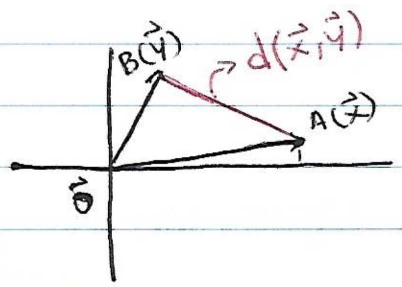
$= (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$

Αποδείχθηκε ότι $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

* Η νόρμα $\|\cdot\|$ καλείται ευκλ. Νόρμα/μέτρο συμβ. $|\vec{x}|$, $\|\vec{x}\|_2$

Απόσταση στον $\mathbb{R}^n$

$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

2) $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} + \vec{y}\|$

3) * $\big|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|$

4) $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ Ν.δ.ο.

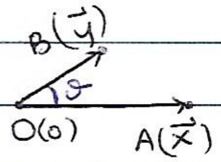
$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| \leq 2 \min\left\{ \frac{1}{\|\vec{x}\|}, \frac{1}{\|\vec{y}\|} \right\} \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

(Υποδ. $\|\vec{x}\| \leq \|\vec{y}\|$

$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \left\| \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|} \cdot \|\vec{y}\| - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \cdot \|\vec{y}\| \right\|$, Μετά την ασκ. 3, (2 φορές))

ΤΑΥΤΙΣΗ ΟΡΙΣΜΩΝ (!)

Παίρνουμε $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x},\vec{y}\neq\vec{0}$.



$\vec{x},\vec{y}$ = γρ. ανεξάρτητα

$(AB)^2=\|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ γενίκευση πυθαγορείου / νόμος συνημιτόνων

$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2\,(OA)(OB)\,συνθ$ (ΣΧΟΛΕΙΟ)

$$\left.\begin{aligned}(AB)^2&=(\vec{x}-\vec{y})\circ(\vec{x}-\vec{y})=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2\,(\vec{x}\circ\vec{y})\\ (AB)^2&=\underset{(OA)}{\|\vec{x}\|^2}+\underset{(OB)}{\|\vec{y}\|^2}-2\,\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\,συνθ\end{aligned}\right\}\ \text{ίσα!}$$

Άρα $\vec{x}\circ\vec{y}=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\,συνθ$ (!)

ορισμός σχολείου

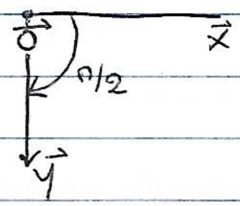
ΚΑΘΕΤΑ / ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

$\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$

Θα λέμε ότι $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

και $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$ / $\vec{u}\perp\vec{v}\iff συνθ=0\iff θ=\pi/2$

στο χώρο



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$, $\|\vec{e}_i\|=1$, $\vec{e}_i\perp\vec{e}_j$, $1\leq i\leq n$, $j\neq i$ (ορθο-καν.)

2) $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ (Πυθ. θεώρημα)

3) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$ (Νόμος του Παραλληλογράμμου)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ $\rightarrow$ λυμμένες

«όνειρο κάθε πληροφορικάριου»

Χώρος Hilbert $\rightsquigarrow$ κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

Θεωρούμε $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - y_2x_3)\vec{i} - (x_1y_3 - y_1x_3)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

$\in \mathbb{R}^3$!

Ιδιότητες

(1) $(\lambda\vec{y}) \times \vec{y} = \vec{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(2) $\vec{y} \times \vec{z} = -\vec{z} \times \vec{y}$

(3) $(\lambda\vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$

(4) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

(5) $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$

(6) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$

Αποδ. $\rightarrow$ ΑΣΚΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

·η ΑΣΚ (5) + στο τέλος $\Longrightarrow$

1) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, τότε $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}$

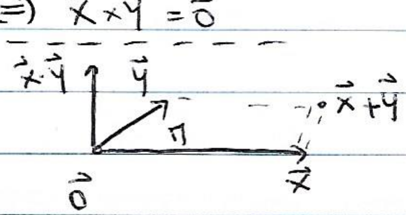
2) Ταυτ. Lagrange: $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$

3) $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$, $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ ημθ, $\vec{x}, \vec{y}$ γραμμ. εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

(4) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Εμβ(Π) $= \|\vec{x} \times \vec{y}\|$

Π // γραμμές, κορυφές $\vec{0}, \vec{x}, \vec{y}, x+y$

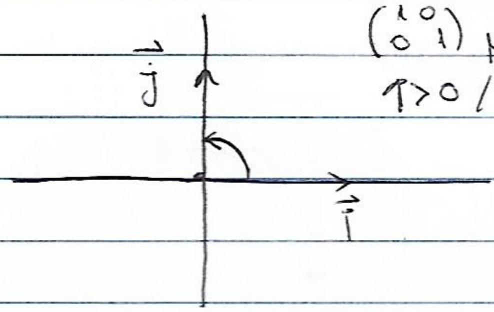


Δεξιόστροφο Σύστημα συν. στον $\mathbb{R}^n$

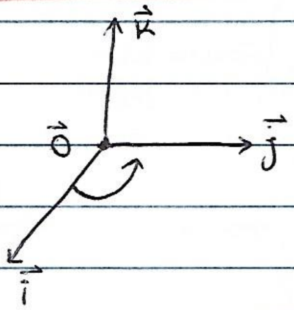
$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ Δεξιόστροφο $\iff \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) > 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ δεξιόστροφο
2) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ δεξιόστροφο



$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ με ορίζουσα $1>0$ / Δεξιόστροφο



$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ με ορ. $1>0$ / δεξιόστροφο

Κεφ. 2: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$

(Α) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \dots \in \mathbb{R}^n$

Ακολουθία του $\mathbb{R}^n$: $\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $\vec{a}(k) = a_k$ και $\lim_{k\to+\infty} \vec{a}_k = \vec{\ell} \ (\in \mathbb{R}^n) \iff$

$\iff \lim_{k\to+\infty} \|\vec{a}_k - \vec{\ell}\| = 0.$ $\left(\vec{a}_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \vec{\ell}\right)$

$\underline{n=1}$ $\quad a_k \xrightarrow[k]{} \ell \in \mathbb{R} \iff |a_k - \ell| \xrightarrow[k]{} 0$

ακολουθίες

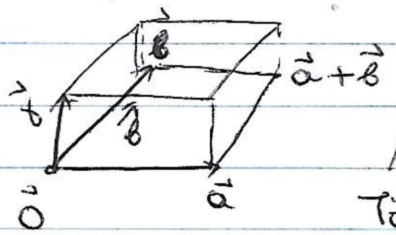
$\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$
$\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$
$\vdots$
$\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$
$\vdots$

$(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}, (a_{k,2})_{k=1}^{\infty}, \dots, (a_{kn})_{k=1}^{\infty}$

Πρόταση: (;)

ΑΣΚΗΣΗ (⇐ πίσω)

5) Θεωρούμε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 / \{\vec{0}\}$



B // επίπεδο, κορυφές , $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{\gamma}$, $\vec{a}+\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{\gamma}$, $\vec{0}$

όγκος

Τότε $V(B) = \left| \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \right| \right|$ απόλυτη τιμή

ορίζουσα Det

Πρόταση: $\vec{a}_k \xrightarrow[k]{} \vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \iff \begin{cases} a_{k,1} \xrightarrow[k]{} \ell_1 \\ a_{k,2} \xrightarrow[k]{} \ell_2 \\ \vdots \\ a_{k,n} \xrightarrow[k]{} \ell_n \end{cases}$