2ο μάθημα

12/10/20

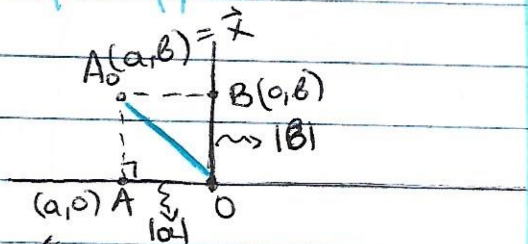
Δεν ξεχνάμε:

$\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$ είναι δ.χ. διάστασης n $(n=1,2,\dots)$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n y_n$

$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ ↪ ευκλ. μέτρο/νόρμα

$$\max_{(1\le i\le n)} |x_i| \le \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \le n \cdot \max_{(1\le i \le n)} |x_i|$$



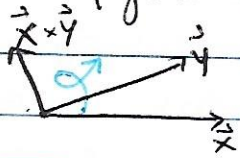
(C-S)
$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

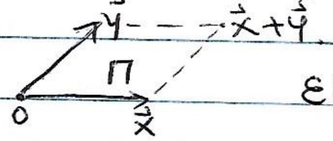
$(OA_0) \le (OA) + (OB) \le (OA) + (OA) = 2(OA)$

Αν $(OB) \le (OA)$

$\|\vec{x}\| \le 2 \max_{i=1,2} \{|x_i|\}$ και $(OA_0) \ge (OA), (OB)$

και ορίζεται το εξ. γινόμενο $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$





$E(\Pi) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$

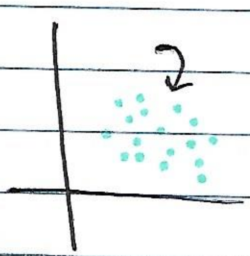
ΚΕΦ. 2 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

$\vec{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$\vec{a}(k) = \vec{a}$, $k = 1, 2, \dots$

$n=1$, συνήθης ακολουθία στο $\mathbb{R}$

$n=2$,



(αντ. για $n=3$, στο χώρο)

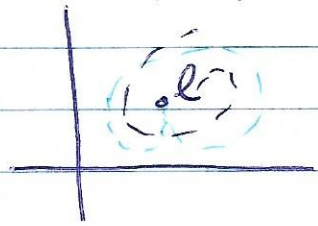
σημειώνονται ακολουθίες όπως $(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}$, $(a_{k,2})_{k=1}^{\infty}$, $(a_{k,n})_{k=1}^{\infty}$

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}) \\ \vec{a}_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \vec{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \end{cases}$$

η απόσταση της a_k από το ℓ τείνει στο 0.

<u>Ορισμός:</u> $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{a}_k = \ell \in \mathbb{R}^n \iff \lim\limits_{k\to+\infty} \|\vec{a}_k - \vec{\ell}\| = 0$

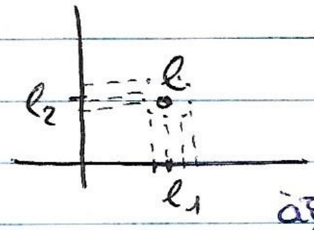
"στον $\mathbb{R}^2$ το ℓ μπορεί να προσεγγιστεί απ' όλες τις μεριές"



<u>Πρόταση:</u> $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$

Τότε $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{a}_k = \vec{\ell} \iff \lim\limits_{k\to+\infty} a_{k,i} = \ell_i, \quad i=1,2,\dots,n$

σχηματικά



οι προβολές των σημείων της ακολουθίας στους άξονες τείνουν στα ℓ_1, ℓ_2.

Απόδ. Ξέρουμε ότι $|a_{k,i} - \ell_i| \le \|\vec{a}_k - \ell\| \le n \cdot \max\limits_{1\le j\le n}\{|a_{k,j} - \ell_j|\}$

$i = 1, 2, \dots, n$

Άρα η μελέτη ακολουθιών (στον $\mathbb{R}^2$) ανάγεται στη μελέτη ακολουθιών στον $\mathbb{R}$, τις οποίες γνωρίζουμε.

π.χ. $\vec{a}_k = \left(\sqrt[k]{2}, \left(1+\frac{2}{k}\right)^k\right) \to (1, e^2)$

τείνει στο 1   τείνει στο e^2

φραγμ.

$\vec{b}_k = \left(\frac{\text{συν}\,k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\text{ημ}\,k}}, \frac{k}{e^k}, \frac{5k^2}{k^2+1}\right) \xrightarrow{k} (0, 1, 0, 5)$

B- κομμάτι

ΣΦΑΙΡΕΣ (ΜΠΑΛΕΣ) / ΑΝΟΙΚΤΑ, ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

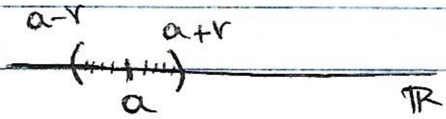
1) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$

$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\| < r \}$ Ανοικτή σφαίρα, κέντρου $\vec{a}$, ακτίνας r

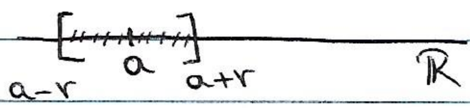
$\overline{B}(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x}-\vec{a}\| \leq r \}$ κλειστή —//— —//—

Γεωμετρικά

$n=1$

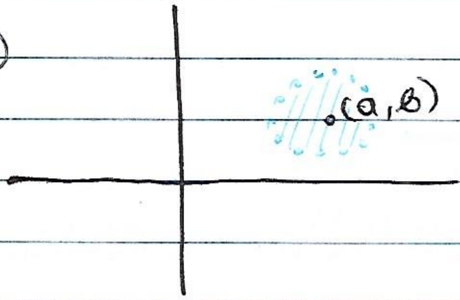


, $B(a,r) = (a-r, a+r)$



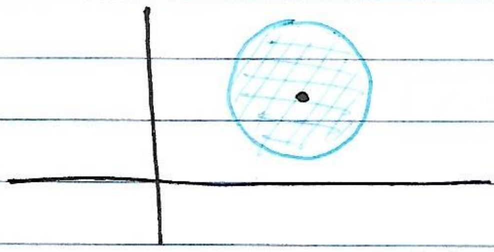
, $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$

$n=2$



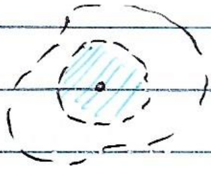
$B((a,b), r) = \{ (x,y) : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r \}$

$\overline{B}((a,b), r) = \{ \ldots\ldots \leq r \}$

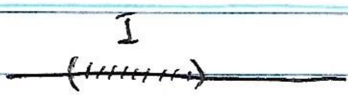


2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$

- A ανοικτό στον $\mathbb{R}^n \iff \forall\, \vec{a} \in A,\ \exists\, B(\vec{a}, r) \subseteq A$ (μπάλα)



ΠΡΟΣΟΧΗ!



I = ανοικτό στο $\mathbb{R}$

όχι ανοικτό στον $\mathbb{R}^2$!

- A κλειστό $\iff \mathbb{R}^n \setminus A = A^c$ ανοικτό

ΑΣΚΗΣΗ $B(\vec{a},r)$ είναι ανοικτό σύνολο, $\overline{B}(\vec{a},r)$ είναι κλειστό σύνολο

υποσύνολο

Γ' ΜΕΡΟΣ — ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΝΟΛΟΥ $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Θεωρούμε $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in A$

ΟΡΙΣΜΟΙ

1) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του $A \iff \forall\, r>0,\ B(\vec{a},r) \cap (A \setminus \{\vec{a}\}) \neq \emptyset$

$\iff \exists\ \vec{a}_k \in A,\ \vec{a}_k \neq \vec{a}\ (k \in \mathbb{N})$ με $\vec{a}_k \xrightarrow[k]{} \vec{a}$

Συμβολ. A' = σύνολο Σ.Σ. του A (ή παράγωγο)

2) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ σημείο επαφής του $A \iff \forall\, r>0,\ B(\vec{a},r) \cap A \neq \emptyset$

$\iff \exists\ \vec{a}_k \in A$, με $\vec{a}_k \xrightarrow[k]{} \vec{a}$

Συμβολ. $\overline{A}$ = σύνολο Σ.Ε. / κλειστή θήκη, κλειστότητα του A

3) $\vec{b} \in A$ μεμονωμένο σημείο του $A \iff \exists\ \varepsilon>0:\ B(\vec{b},\varepsilon) \cap A = \{\vec{b}\}$

Ισχύει $\overline{A} = A \cup A'$

θήκη = (σημεία επαφής) ή μεμονωμ. σημεία του A ή σημεία συσσώρευσης του A

4) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a}$ συνοριακό σημείο του $A \Leftrightarrow \forall\, r>0 \begin{cases} B(\vec{a},r) \cap A \neq \emptyset \\ B(\vec{a},r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{a} \in \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$

$\boxed{\text{Συμβολ.}}$ ∂A, bdA σύνολο των συνοριακών σ. / σύνορο

5) $\vec{b} \in A$, $\vec{b}$ εσωτερικό σημείο του $A \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon>0: B(\vec{b},\varepsilon) \subseteq A$

$\boxed{\text{Συμβολ.}}$ $A^\circ =$ σύνολο εσ. σ. του A / εσωτερικό του A

<u>Ισχύουν τα εξής</u>

1) K κλειστό $\Leftrightarrow K' \subseteq K \Leftrightarrow K = \overline{K} \Leftrightarrow \partial K \subseteq K$

2) A ανοικτό $\Leftrightarrow A = A^\circ$

$\boxed{\text{Δ'- ΜΕΡΟΣ}}$ $\boxed{\text{ΦΡΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ}}$

<u>Ορισμός:</u> $A \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο $\Leftrightarrow \exists\, M>0: \forall\, \vec{x} \in A$ ισχύει $\|\vec{x}\| \leq M \Leftrightarrow \exists\, M>0: A \subseteq B(\vec{0}, M)$

$\Leftrightarrow \exists\, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \mu>0: A \subseteq B(\vec{x}_0, \mu)$

<u>Θεώρημα B-W:</u> Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^n$, περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

$\boxed{\text{Ε' ΜΕΡΟΣ}}$ $\boxed{\text{ΣΥΜΠΑΓΕΣ ΣΥΝΟΛΟ}}$

<u>Ορισμός:</u> $K \in \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall$ φραγμένη ακολουθία $(\vec{a}_k)$ του K, υπάρχει υπακολουθία $(\vec{a}_{k_\nu})_{\nu=1}^{\infty}$ με $\vec{a}_{k_\nu} \longrightarrow \vec{a} \in K$

Σημαντική ιδιότητα του $\mathbb{R}^n$

K συμπαγές $\Longleftrightarrow$ K κλειστό + φραγμένο

Ζ' ΜΕΡΟΣ $\boxed{\text{ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ}}$

Ορισμός: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ συνεκτικό $\Leftrightarrow$ Δεν υπάρχουν

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$: και A, B ανοικτά
$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset, \\ S \cap A \neq \emptyset \text{ και} \\ S \cap B \neq \emptyset, \\ S \subseteq A \cup B \end{cases}$$

(δηλ. το S δεν χωρίζεται/σπάει σε 2 (ή περισσότερα) κομμάτια)

Ισχύει:
- $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό ($\mathbb{R}^n$ συνεκτικό)
- Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα μόνα συνεκτικά υποσύνολά του.
- Στον $\mathbb{R}^n$ τα μόνα ανοιχτά + κλειστά υποσύνολα του είναι το $\mathbb{R}$, $\emptyset$.

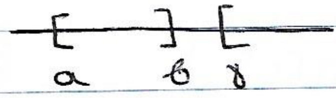
Παραδείγματα

1) $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $(a < b)$

Ανοικτό, φραγμένο, όχι συμπαγές, συνεκτικό

$A' = [a, b] = \bar{A}$, $A^\circ = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$

2) $A = [a, \beta] \cup [\gamma, +\infty)$, $(a < \beta < \gamma)$



κλειστό, όχι φραγμένο, όχι συμπαγές, όχι συνεκτικό (έχει 2 κομμάτια)

$A' = A = \bar{A}$, $A^\circ = (a, \beta) \cup (\gamma, +\infty)$, $\partial A = \{a, \beta, \gamma\}$

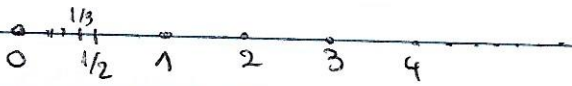
∃ άρρητοι
που πηγαίνουν
σε ρητό

3) $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, όχι κλειστό, όχι ανοικτό, φραγμένο, όχι συμπαγές

$A' = \bar{A} = [0,1]$ κάθε σημείο ρητών αρ. μπορεί να προσεγγ. με ακολουθία ρητών ή αρρήτων μέσα το $[0,1]$

$\partial A = [0,1]$

4) $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

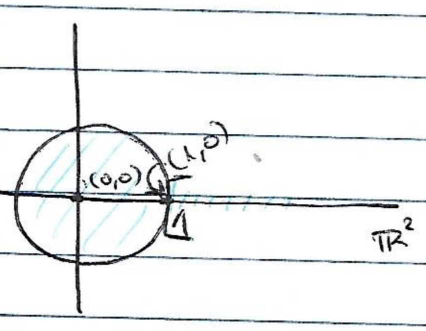


$\bar{A}$ κλειστό, όχι φραγμένο (Αρχιμήδεια Ιδιότητα) όχι συνεκτικό,

$A' = \{0\}$, $\bar{A} = A$, $\partial A = A$

Μεμονωμένα σημεία $\rightsquigarrow A \setminus \{0\}$

5)



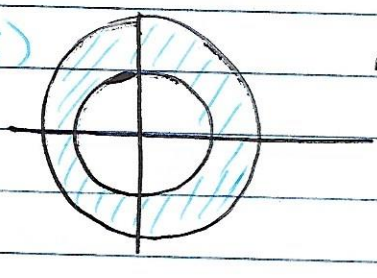
$A = \bar{B}((0,0),1) \cup \{(a,0) : a \geq 0\}$

κλειστό, μη φραγμένο, συνεκτικό (ένα κομμάτι)

$A' = A = \bar{A}$, $A^{\circ} = B((0,0),1)$, $\partial A = \{(x,y) : x^2+y^2=1\} \cup$

$\cup \{(a,0) : a \geq 1\}$

6)

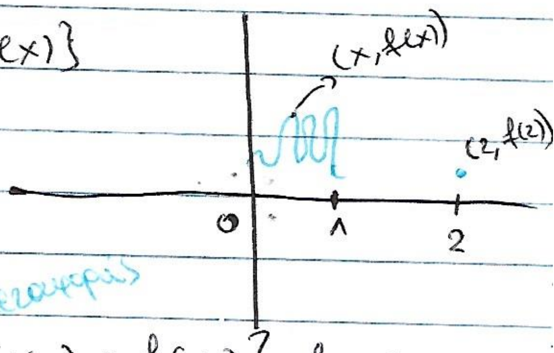


$A = \bar{B}((0,0),2) \cap B^c((0,0),1)$

κλειστό, φραγμένο, συνεκτικό, $A' = A = \bar{A}$, $\partial A = \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = 2\} \cup \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$

7) $f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ συνεχής

γράφημα $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \cup \{2\}, y = f(x)\}$



G_f κλειστό γιατί;

θεωρούμε $(x_n, f(x_n)) \in G_f$

$(x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x_0, y_0)$

έχουμε $\begin{cases} x_n \to x_0 \\ f(x_n) \to y_0 \end{cases}$, f συνεχής αρχή μεταφοράς $\left. f(x_n) \to f(x_0) \right\}$ $f(x_0) = y$

Τελικά $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0)) \in G_f$

$\bar{G}_f = G_f$, $G_f' = G_f \setminus \{(2, f(2))\}$, $(2, f(2))$ μεμονωμένο

Κεφ. 3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΚΛΕΙΔ. ΧΩΡΩΝ & ΣΥΝΟΛΟ ΣΤΑΘΜΗΣ

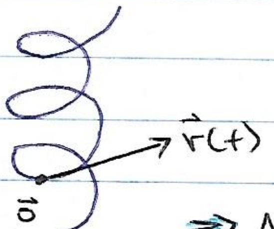
ΟΡΙΑ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ

(A) $\vec{f}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (n, m \geq 1)$

- Για $\boxed{n=m=1}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ⇒ Πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής (γνωστές)
  $(x, \eta\mu x, e^x \ldots)$

(? Γιατί έχουμε και άλλες συναρτήσεις; Τίποτα δεν ? περιγράφεται με μια μεταβλητή)

- Για $\boxed{n=1,\ m\geq 2}$ $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^m$ (I = διάστημα)
  $\vec{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_m(t)),\ t \in I$
  (συνήθως t χρόνος)

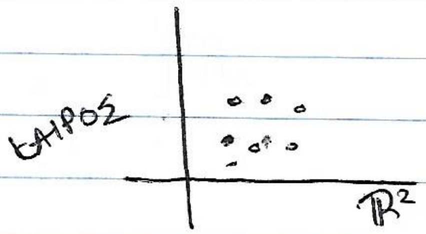


μπορεί να περιγράψει π.χ. ταχύτητα, διάνυσμα θέσης κ.λ.π.

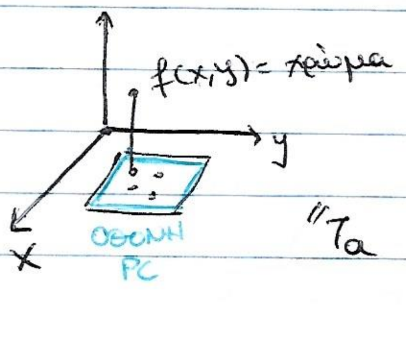
⇒ Διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής

*** • Για $\boxed{n\geq 2,\ m=1}$ $\quad \underset{\in \mathbb{R}^n}{(x_1, \ldots, x_n)} \longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$

⇒ Πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών



$f(x,y) = T(x,y) =$ θερμοκρασία στο (x,y)



βίντεο delos: → pixel (συνάρτηση) → χρώμα; ↓ χρόνος

"Τα μαθηματικά είναι μια φιλοσοφία που ξεπερνάει τις αισθήσεις μας"

• Για $\boxed{n, m \geq 2}$ $\quad \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\vec{f}} \vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$

$= (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

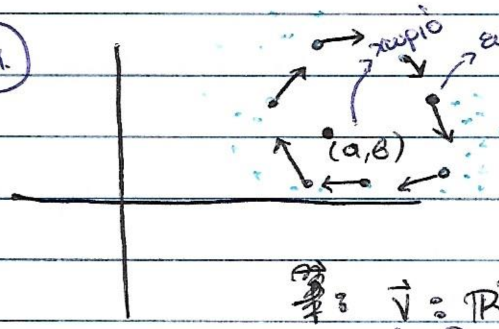
$$\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$f_1, f_2, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

⇒ $\vec{f}$ Διανυσματική Συνάρτηση Πολλών Μεταβλητών

Η μελέτη (ως προς τη συνέχεια, όρια κ.τ.λ.) ανάγεται στη μελέτη των συντεταγμένων των $f_1, f_2, \dots, f_m$ και ονομάζεται

Π.χ.



Παράδειγμα κυκλώνα

όλο το μπλε κινείται στον $\mathbb{R}^2$

$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \vec{v}(x,y) \in \mathbb{R}^2$

κυκλώνας — σε κάθε σημείο του χώρου η ταχύτητα του ανέμου ήταν $v(x,y)$

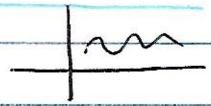
(μεταβλητές χώρος, χρόνος, ταχύτητας)

ΓΡΑΦΗΜΑ f

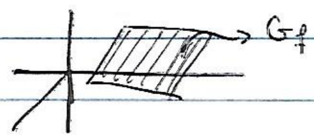
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})), \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

• Για $n=1$, $G_f \subseteq \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}$



• Για $n=2$, $G_f \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$



Δεν μπορούμε να "δούμε" για $n>2$

Μάθημα 3ο

14/10/2020

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$\Sigma_c = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(x) = c \}$ Σύνολο Στάθμης της f σταθεράς c