Μάθημα 3ο

14/10/2020

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$\Sigma_c = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(x) = c \}$ Σύνολο Στάθμης της f σταθεράς c

Παραδείγματα

1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $F(x,y) = x^2 + y^2$

$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $G(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$c \in \mathbb{R}$ $\Sigma_c = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = c \}$ της F

$c<0$, $\Sigma_c = \emptyset$

$c=0$, $\Sigma_c = \{(0,0)\}$

$c>0$, κύκλοι κέντρου $(0,0)$, ακτίνας $\sqrt{c}$

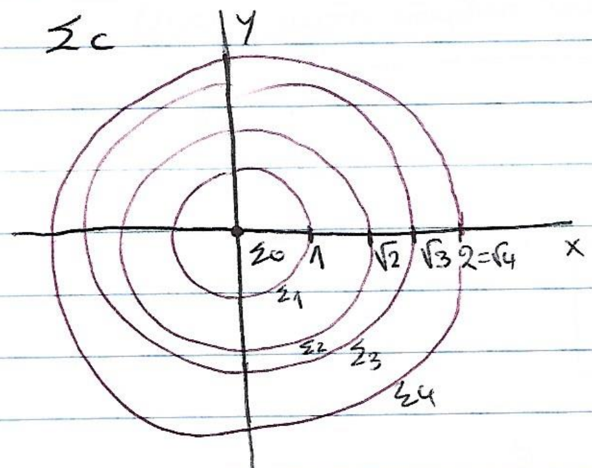
$\Sigma_c = \{ (x,y) : \sqrt{x^2+y^2} = c \}$

της G

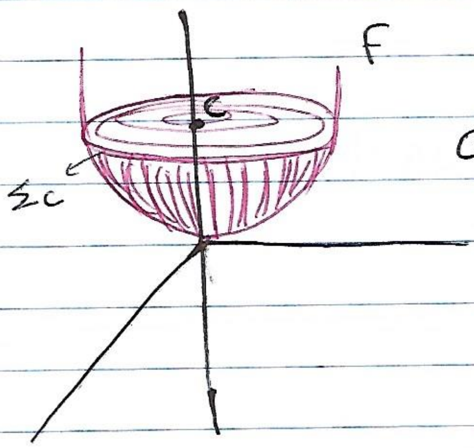
$c<0$, $\Sigma_c = \emptyset$

$c=0$, $\Sigma_c = \{(0,0)\}$

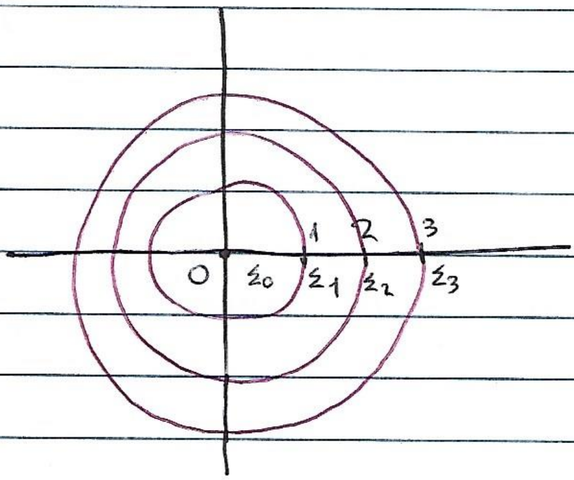
$c<0$ κύκλοι κέντρου $(0,0)$, ακτίνας c

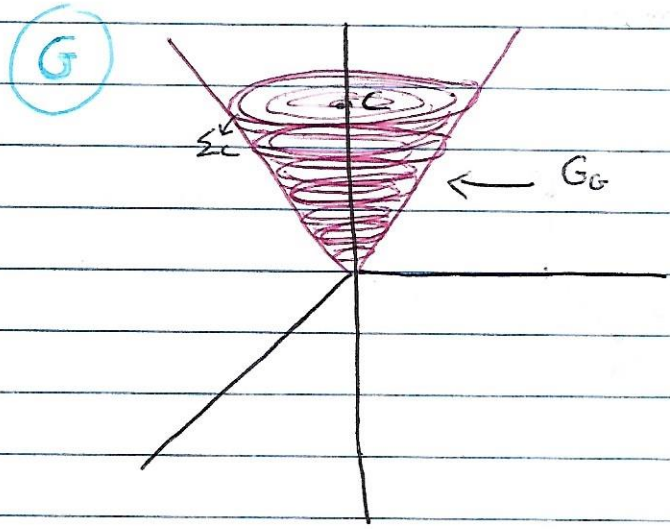


F



G_F = Παραβολοειδές





Απόσταση των Συνόλων Στάθμης της F είναι

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$

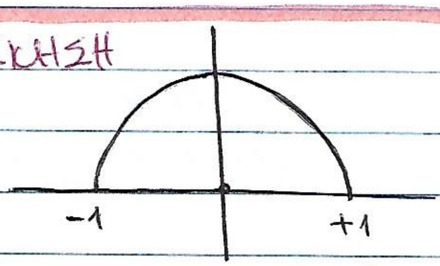
Απόσταση των Συνόλων Στάθμης της G είναι

$(n+1)-n=1$

Σχόλιο: Ο κύκλος $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ **δεν** είναι γράφημα συνάρτησης, είναι Σύνολο Στάθμης των F, G

ΑΣΚΗΣΗ

2)



$A=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ x\in[-1,+1],\ y\geq 0\}$

Να περιγραφεί ως γράφημα συνάρτησης και Σύνολο Στάθμης τουλάχιστον 2, $F, G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

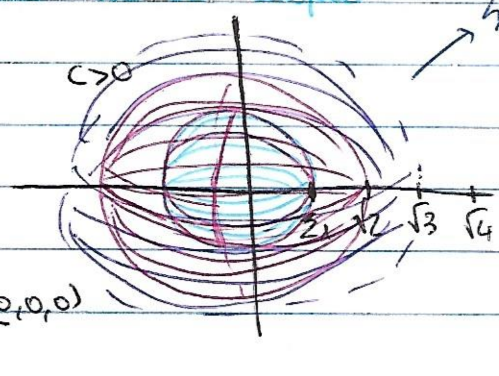
3) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

$G_F=\{(x,y,z,\ x^2+y^2+z^2)\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$\subseteq \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ ⇝ δεν μπορούμε να το δούμε

$\Sigma_c=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=c\}$

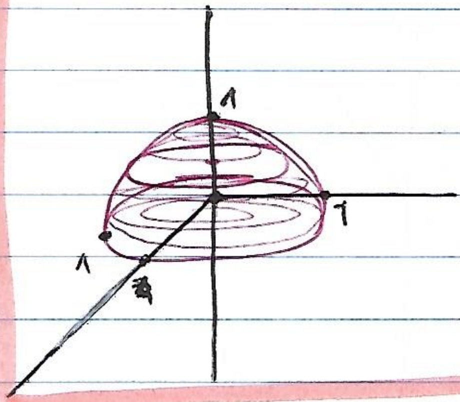
→ σφαίρες η μια μες την άλλη



Σύνολα στάθμης (c>0) είναι επιφάνεια σφαίρας κέντρου (0,0,0) ακτίνας $\sqrt{c}$

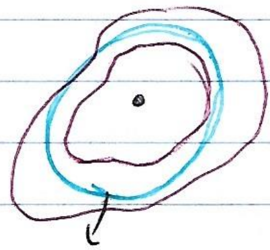
ΑΣΚΗΣΗ

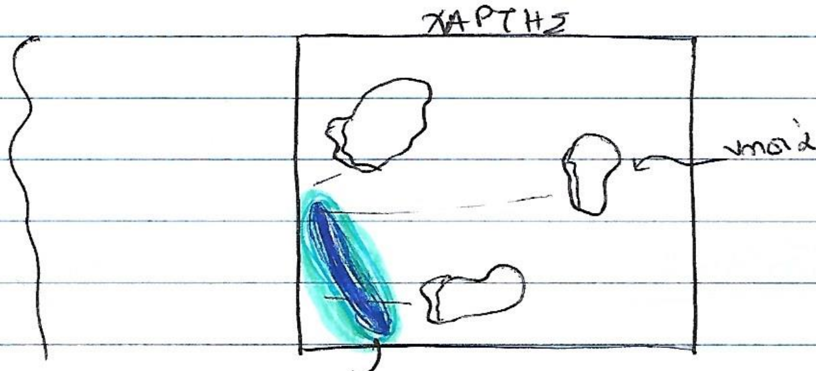
4) $A = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1,\ x,y \in \mathbb{R},\ z \geq 0 \}$

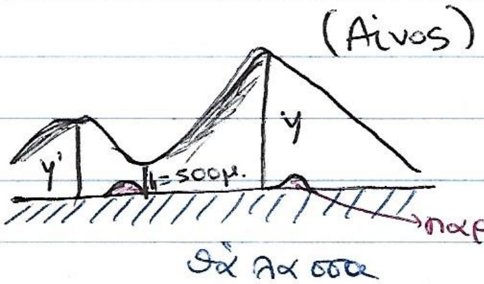


Να περιγραφεί το A ως γράφημα συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και ως Σύνολο Στάθμης 2 τουλάχιστον συναρτήσεων ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

Πού βλέπουμε σύνολα στάθμης;

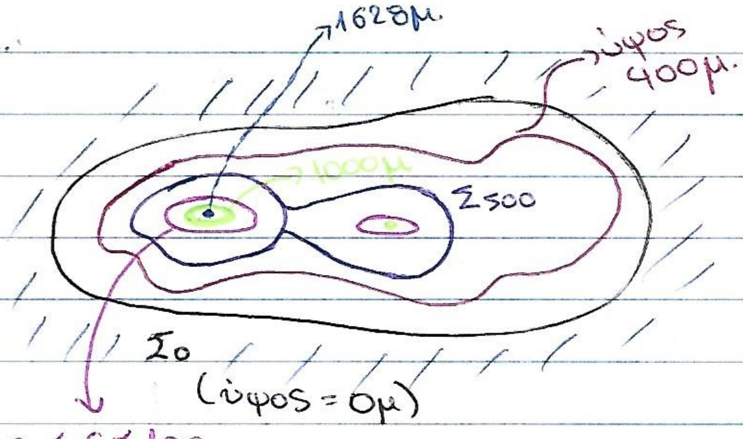






$y = 1628\mu.$

$y' = 1000\mu.$



ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορισμός:

$f = (f_1, \dots, f_m) : A\ (\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- $\vec{x}_0 \in A'$ (δηλ. $\exists\ \vec{x}_n \in A$, $\vec{x}_n \neq \vec{x}_0$ με $\vec{x}_n \to \vec{x}_0$)

$\boxed{\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}} \iff \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0$ αν $\vec{x} \in A$ με $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$

$\iff \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon, \vec{x}_0) > 0$, αν $\vec{x} \in B(\vec{x}, \delta) \cap (A \setminus \{\vec{x}_0\})$ τότε $\vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{b}, \varepsilon) \iff$

$\iff \forall\ \vec{x}_k \in A$, $\vec{x}_k \neq \vec{x}_0$ με $\vec{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}_0$ έχουμε $\vec{f}(\vec{x}_k) \xrightarrow[k]{} \vec{b}$

- $\vec{x}_0 \in A$, η $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

$\iff \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0$ αν $\|\vec{x} - x_0\| < \delta$, $\vec{x} \in A$ τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$

$\iff \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) > 0$ αν $\vec{x} \in B(\vec{x}_0, \delta) \cap A$ τότε $\vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$

$\iff$ Για κάθε ακολουθία $\vec{x}_k \in A$ με $\vec{x}_k \to \vec{x}_0$ έχουμε $\vec{f}(\vec{x}_k) \to \vec{f}(\vec{x}_0)$

Ιδιαιτέρως Αν $\vec{x}_0 \in A \cap A'$, f συνεχής στο $\vec{x}_0$ $\iff \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$

Πρόταση: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A\ (\subseteq \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^m$

i) $\vec{x}_0 \in A'$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ $\sim$ $\vec{f}(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x} \to \vec{x}_0]{} b \iff f_i(\vec{x}) \to b_i$, $i = 1, \dots, m$

ii) $\vec{x}_0 \in A$, $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{x}_0 \iff f_i$ συνεχείς στο $\vec{x}_0$, $i = 1, \dots, m$

Σχόλιο: Με την βοήθεια της Πρότασης αυτής, η μελέτη ορίου (Συνέχειας), Διανυσματικής συναρτ. $(m \geq 2)$ ανάγεται στην μελέτη Πραγματικής συνάρτησης.

Παρατήρηση:
Ισχύουν για τα όρια / συνέχεια, οι αλγεβρικές ιδιότητες αυτών, όπως στο $\mathbb{R}$, εφ' όσον ορίζονται.

(Δεν ορίζεται καλώς πολ/σμός στον $\mathbb{R}^3$. Δεν μπορούμε π.χ. να έχουμε πηλίκο αριθμού με διάνυσμα ή διάνυσμα με διάνυσμα)

ΑΣΚΗΣΗ 1

πολυώνυμο P = Πολυώνυμο

- $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $P(x_1, \dots, x_n) = \Sigma$
  είναι συνεχής συνάρτηση

- P, Q πολυώνυμα, τότε $\dfrac{P(\vec{x})}{Q(\vec{x})}$ συνεχής συνάρτηση για
  $\vec{x} \in \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n : Q(\vec{w}) \neq 0\}$

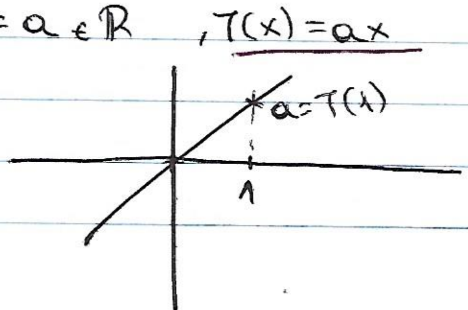
ΑΣΚΗΣΗ 2 (Γραμμικές Συναρτήσεις)

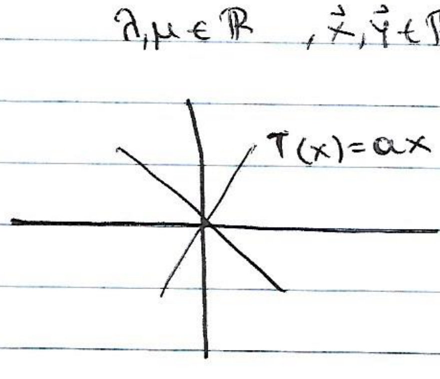
$\vec{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad (n, m \geq 1) \rightsquigarrow$ Γραμμική $\Longleftrightarrow \vec{T}(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda\vec{T}(\vec{x}) + \mu\cdot\vec{T}(\vec{y})$

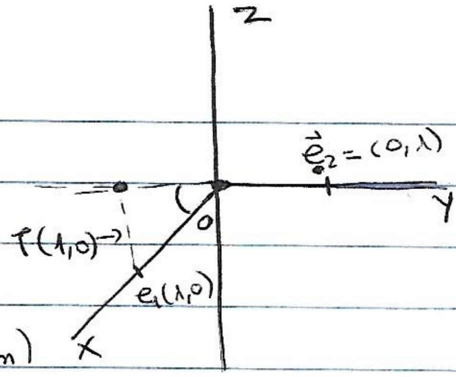
$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad , \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

- $n = m = 1$, $T(x) = T(x \cdot 1) = x \cdot T(1)$

  $T(1) = a \in \mathbb{R}$, $\underline{T(x) = ax}$







• $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ γραμμική $(n\geq 2)$

* $\vec{x}=x_1\cdot\vec{e}_1+\dots+x_n\vec{e}_n\in\mathbb{R}^n$

$T(\vec{x})=x_1T(\vec{e}_1)+\dots+x_n\cdot T(\vec{e}_n)$

$T(\vec{e}_1)=a_1,\dots,T(\vec{e}_n)=a_n\ /\ \vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$

$T(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}$

Η $T(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}$, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι Lipshitz-συνεχής

$$|T(\vec{y})-T(\vec{x})|=|T(\vec{y}-\vec{x})|=|\vec{a}\cdot(\vec{y}-\vec{x})|\overset{C-S}{\leq}\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{y}-\vec{x}\|$$

• $n,m\geq 2$, $\vec{T}=(T_1,T_2,\dots,T_m)$

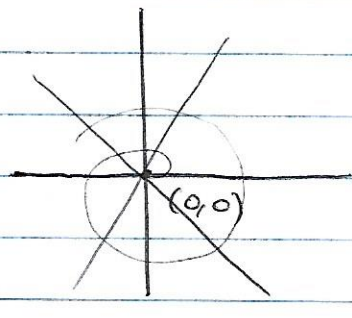
$\vec{T}$ γραμμική $\Leftrightarrow$ $T_1,\dots,T_m$ γραμμικές

$\vec{f}(\vec{x})=(\vec{a}_1\cdot\vec{x},\vec{a}_2\cdot\vec{x},\dots,\vec{a}_m\cdot\vec{x})$

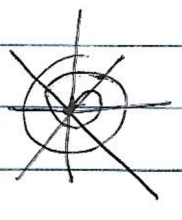
$$\begin{pmatrix} T_1(\vec{e}_1) & T_1(\vec{e}_2)\dots & T_1(\vec{e}_n)\\ \vdots & & \\ T_m(\vec{e}_1) & T_m(\vec{e}_2)\dots & T_m(\vec{e}_n)\end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΙΑ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$



α΄ τρόπος



$y=ax$ $\quad f(x,ax)=\dfrac{ax^2}{x^2(1+a^2)}=\dfrac{a}{1+a^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x,ax)=\dfrac{a}{1+a^2}$

Αν $\exists\lim\limits_{(0,0)}$ θα έπρεπε να είναι μοναδικό. Όμως

$\dfrac{a}{1+a^2}$ παίρνει άπειρες τιμές. π.χ. $\left.\begin{array}{l} a=0,\ l=0\\ a=1,\ l=1/2\end{array}\right\}$ διαφορετικά

άρα δεν έχει όριο.

β' τρόπος

- $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$

$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \xrightarrow{n} 0 = \ell_1$

- $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to 1/2 = \ell_2$

$\ell_1 \neq \ell_2$

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(0,0)}$

γ' τρόπος

$(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$ $r>0$

$f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta) = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \ell_\theta$ } Για διαφορετικά θ έχουμε διαφ. ℓ_θ

π.χ. για $\theta=0$, $\theta=\pi/2$, $\theta=\pi/4$

2) $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Παρατηρούμε ότι $t=y^2>0$,

$g(x,t) = \frac{xt}{x^2+t^2}$

$\lim\limits_{(0,0)} \frac{xt}{x^2+t^2}$ δεν υπάρχει / $\nexists \lim\limits_{(0,0)} g(x,y)$

β' τρόπος

$x = a\cancel{x}^2$, $g(ay^2, y) = \frac{ay^4}{(a^2+1)y^4} = \frac{a}{a^2+1}$

γ' τρόπος

$\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$, $g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to 0$

$\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $g\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \to 0$

από αρχή μεταφοράς $\nexists$ το όριο

3) $h(x,y,z)=\dfrac{xy^2+z^3}{x^2+y^4+z^2}$, $h(x,y,0)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $\lim\limits_{(0,0,0)} h(x,y,0)$ δεν υπάρχει

4) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

<u>α΄ τρόπος</u>

$\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ (το x^2+y^2 είναι ≥ 0 και xy "τρέχει" πιο γρήγορα στο 0)

$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}|y| \xrightarrow[(0,0)]{} 0$

<u>β΄ τρόπος</u>

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\cdot|y|^2}{\|(x,y)\|^2} = \frac{\|(x,y)\|\cdot\|x,y\|^2}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| \xrightarrow[(0,0)]{} 0$$

5) $h(x,y)=e^{\frac{x\cdot y^2}{x^2+y^2}}$

$\dfrac{x\cdot y^2}{x^2+y^2} \to 0$, $\lim\limits_{(0,0)} h(x,y)=e^0=1$

6) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{ημ(x^2+y^2)}$

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{ημt}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$

Επομένως $\dfrac{x^2+y^2}{ημ(x^2+y^2)} \to 1$

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}_{\text{από άσκηση} \to 0}\cdot\underbrace{\frac{x^2+y^2}{ημ(x^2+y^2)}}_{1} \to 0\cdot 1=0$$

7) $f(x,y) = \dfrac{\eta\mu\left(\frac{x^2}{y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (x,y) \neq (0,0)$

• $f(0,y) = 0 \xrightarrow[y \to 0]{(0,0)} 0 = \ell_1$

• $\underset{x>0}{f(x,x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\eta\mu x}{x} \xrightarrow[(0,0)]{} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \ell_2$ $\quad \ell_1 \neq \ell_2$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(0,0)}$

8) $f(x,y) = \dfrac{\eta\mu(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{\eta\mu(xy)}{xy}}_{\downarrow\ 1} \cdot \underbrace{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\downarrow\ ?}$$

$$|g(x,y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x|\cdot|y|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|} =$$

$$= \|(x,y)\| \longrightarrow 0$$

άρα $\quad f(x,y) \xrightarrow[(0,0)]{} 1 \cdot 0 = 0$

9) $g_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η g_λ είναι συνεχής (και) στο $(0,0)$

$$\left| \frac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} = \|(x,y)\|^{2(1-\lambda)}$$

• $1-\lambda > 0 \rightsquigarrow \underline{\lambda < 1}$ $\quad \lim_{(0,0)} g_\lambda(x,y) = 0$

άρα $\lambda < 1$, g_λ συνεχής

• $\underline{\lambda = 1}$, $g_\lambda(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \\ 0 \end{cases}$ $\quad$ Δεν $\nexists \lim_{(0,0)} g_\lambda$

• $\underline{\lambda > 1}$, $(x^2+y^2)^\lambda < (x^2+y^2)^1$ $\quad$ ((x,y) περιοχή του (0,0))

$$|g_\lambda(x,y)| \geq |g_1(x,y)|$$

Αν $g_\lambda(x,y) \to 0 = g_\lambda(0,0)$

$\Rightarrow g_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \to 0$ αδύνατον!

$$\boxed{g_\lambda \text{ συνεχής} \iff \lambda < 1}$$