Μάθημα 13 (9-11/10-11)

(B) Πολυώνυμο Taylor

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με παραγώγους $(\nu+1)$-τάξης. Τότε

$$F(t) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 + \dots + \frac{1}{\nu!}F^{(\nu)}(0)t^\nu + R_\nu(t) \quad (*)$$
$$= P_\nu(t) + R_\nu(t)$$

(Θ. Taylor, MacLaurin)

P_ν πολυώνυμο Taylor ν-τάξης

$R_\nu(t) = \frac{1}{(\nu+1)!}F^{(\nu+1)}(\theta t)$ για κάποιο $\theta = \theta(t, \nu, t_0 = 0) \in (0,1)$

P_ν το Μοναδικό Πολυώνυμο : $F(0) = P_\nu(0)$, $F'(0) = P'_\nu(0)$, …, $F^{(\nu)}(0) = P_\nu^{(\nu)}(0)$

και $\lim_{h \to 0} \frac{F(h) - P_\nu(h)}{h^\nu} = \lim_{h \to 0} \frac{R_\nu(h)}{h^\nu} = 0$

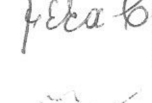
Αν $f: A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A (=$ανοικτό$)$, $f - C^3$

Τι ζητάμε;

Πολυώνυμο ως προς x, y, ώστε η f να έχει στο (x_0, y_0) ίδια τιμή και παραγώγους μερικές ίδιες με το Πολυώνυμο.

Ως συνήθως (πχ. ΘΜΤ πολλών μεταβλητών) ανάγουμε το ζητούμενο σε πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής !

$(x_0, y_0) \in A =$ ανοικτό, $B = B((x_0, y_0), \varepsilon) \subseteq A$



$(x,y) = (x_0 + h_1, y_0 + h_2)$

Έστω $(x,y) \neq (x_0, y_0)$, $(x,y) \in B$, $\begin{cases} \vec{r}(t) = (x_0, y_0) + t(h_1, h_2) = (x_0 + th_1, y_0 + th_2) \\ t \in [0,1] \text{ (το ευθ. τμήμα)} \end{cases}$

Η $F = f \circ \vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι C^3 και

$F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x, y)$

Για την F έχουμε την $(*)$, την χρησιμοποιούμε για $\nu = 2$. Τι μένει; να εκφράσουμε τις $F'(0), F''(0), F'''(\theta)$ συναρτήσει των Μερ. Παρ. της f.

Ο τρόπος; Κανόνας Αλυσίδας!

$$F(t) = f\circ\vec{\varepsilon}(t) \quad , \quad t\in[0,1] \quad , \quad F(t) = f(x_0+th_1, y_0+th_2)$$

- $$F'(t) = h_1 \frac{\partial f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial y} \qquad (1)$$

$$F'(0) = h_1 \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y} \qquad (1^*)$$

- $$F''(t) \overset{(1)}{=} h_1 \left[h_1 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x^2} + h_2 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial y \partial x} \right] + h_2 \left[h_1 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x \partial y} + h_2 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial y^2} \right]$$

$$\underset{\text{παραγ.}}{\overset{\text{θ. μεικτών}}{=}} h_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial y^2} \qquad (2)$$

$$F''(0) = h_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \qquad (2^*)$$

- $$F'''(t) \overset{(2)}{=} h_1^3 \frac{\partial^3 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x^3} + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x^2 \partial y} + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x \partial y^2} + h_2^3 \frac{\partial^3 f(x_0+th_1, y_0+th_2)}{\partial x^3} \qquad (3^*)$$

Θέτουμε

$$d_1 f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right] f(x_0,y_0)$$

$$d_2 f(x_0,y_0)(h_1,h_2) \overset{\text{def}}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0 y_0) \overset{\text{ορ.}}{=} h_1^2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

$$d_3 f(x_0+\vartheta h_1, y_0+\vartheta h_2) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(x_0+\vartheta h_1, y_0+\vartheta h_2) = (\cdots)$$

Από την (*) για την $F = f\circ\vec{\varepsilon}$ συμπεραίνουμε για $t=1$
$(1^*, 2^*, 3^*)$

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!} d_1 f(x_0,y_0)(h_1,h_2) + \frac{1}{2!} d_2 f(x_0,y_0)(h_1,h_2) + \frac{1}{3!} d_3 f(x_0+\vartheta h_1, y_0+\vartheta h_2) \quad (\text{για κάποιο } \vartheta\in(0,1))$$

Διαφορικό k-τάξης

$f: A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in A$, $f - C^k$, $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_1 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right] f(\vec{x}_0) = \sum_{1 \le i_1 \le n} h_{i_1} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1}}$$

$$d_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f(\vec{x}_0) = \sum_{1 \le i_1, i_2 \le n} h_{i_1} h_{i_2} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$$

$\vdots$

$$d_k f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(\vec{x}_0) =$$

$$= \sum_{1 \le i_1, i_2, \dots, i_k \le n} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}$$

Το $d_1 f(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Γραμμική ($d_1 = d$)

$d_2 f(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Τετραγωνική, Ομογενής 2-τάξης

$d_k f(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Ομογενής k-τάξης

Διαφορικά 1, 2, ..., k τάξης

Θ. Taylor

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, C^{k+1} , $\vec{x}_0 \in A$, $\vec{x}_0 + \vec{h} \in A$ με $[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq A$

i) $$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!} d_1 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) + \frac{1}{2!} d_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) + \dots + \frac{1}{k!} d_k f(\vec{x}_0)(\vec{h}) +$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!} d_{k+1} f(\vec{x}_0 + \theta \vec{h})(\vec{h})$$ για κάποιο $\theta = \theta(\vec{x}_0, \vec{h}, k) \in (0,1)$

$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = P_{k,f,\vec{x}_0}(\vec{h}) + R_{k,f,\vec{x}_0}(\vec{h})$ / Πολ. Taylor, Υπόλοιπο Taylor

ii) Το $P_{k,f,\vec{x}_0}$ είναι το μοναδικό με

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - P_{k,f,\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^k} = \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{R_{k,f,\vec{x}_0}(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^k} = 0$$

Το αποδείξαμε για $n=2$, $k=2$ (σχεδόν!)

Ασκήσεις

(I) Να υπολογιστούν τα πολ. Taylor, 2-τάξης για

1) $f(x,y)=\text{συν}(x-y)$ στο $(0,0)$ $\left(1-\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)\ (;;)\right)$

2) $g(x,y)=e^x\,\text{συν}\,y$ στο $(0,0)$ $\left(1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2\ (;)\right)$

3) $h(x,y)=x^y$ στο $(2,1)$ $\big(2+(x-2)+2(y-1)\ln 2+$
$+(x-2)(y-1)(1+\ln 2)+(y-1)^2(\ln 2)^2$
$(;;;)\big)$

(II) Αν
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x+e^y)-\alpha-\beta x-\gamma y-\delta x^2-\varepsilon xy-\zeta y^2}{x^2+y^2}=0$$

$\left(\alpha=\ln 2,\ \beta=\gamma=\frac{1}{2},\ \delta=-\frac{1}{8},\ \varepsilon=-\frac{1}{4},\ \zeta=\frac{1}{8}\right.$ (κάπου λάθη...))

Γ) Τοπικά Ακρότατα

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό, $\vec{x}_0 \in A$

- $\vec{x}_0$ Τοπικό Μέγιστο (Τοπικό Ελάχιστο) της f $\Leftrightarrow$ υπάρχει $B(\vec{x}_0,\delta)\subseteq A$ με $f(\vec{x}_0)\ge f(\vec{x})$ $(f(\vec{x}_0)\le f(\vec{x}))$, $\vec{x}\in B(\vec{x}_0,\delta)$
- Αν το $\vec{x}_0$ είναι Τοπικό Μέγιστο ή Τοπικό Ελάχιστο της f, λέμε ότι το $\vec{x}_0$ είναι Τοπικό Ακρότατο της f

Τι ξέρουμε για $n=1$; Αν το $\vec{x}_0 =$ Τοπ. Ακρ., τότε $f'(x_0)=0$

Τι περιμένουμε για $n\geq 2$; Αν το $\vec{x}_0 =$ » τότε (κλίση) $\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$.

Πρόταση (C^1-συναρτήσεις)

i) Εάν $g: A(\subseteq\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $x_0\in A$ τοπ. ακρότατο, τότε $g'(x_0)=0$ (Γνωστό)

ii) Εάν $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ $(n\geq 2)$, $\vec{x}_0\in A$ τοπ. ακρότατο, τότε $\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$

Αποδ.

ii) Έστω $B(\vec{x}_0,\delta)\subseteq A$ ώστε $f(\vec{x})\ge f(\vec{x}_0)$ για $\vec{x}\in B(\vec{x}_0,\delta)$.

Για την $g(h)=f\circ\vec{\varepsilon}(h)=f(\vec{x}_0+h\vec{e}_i)\ge f(\vec{x}_0)=g(0)$, $h\in(-\delta,+\delta)$

δηλ. το $h_0=0$ είναι τοπ. ελ. Άρα, (i), $g'(0)=0$

$$\left.\begin{aligned} & g'(0)=0 \\ & g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\vec{e}_i)-f(\vec{x}_0)}{h}=\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0)=0.$$

Τυχαίο το $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Άρα, η κλίση $\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$.

Τα σημεία (αν υπάρχουν) ώστε $\nabla f(\vec{x}_0)=\vec{0}$ καλούνται ΚΡΙΣΙΜΑ. Ουσιαστικά, είναι εκείνα τα σημεία με $df(\vec{x}_0)(\vec{h})=0$ $(\vec{h}\in\mathbb{R}^n)$, ισοδύναμα το εφ. επίπεδο στο G_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι οριζόντιο $(x_{n+1}=f(\vec{x}_0))$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η Κατ. Παράγωγος $D_{\vec{\alpha}}f(\vec{x}_0)=\nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{\alpha}=0$ $(\|\vec{\alpha}\|=1)$ στα κρίσιμα σημεία

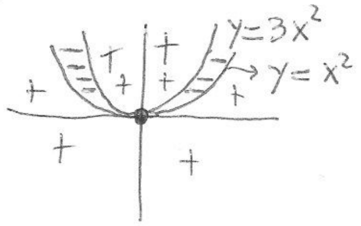
Ερώτημα Αρκεί να περιορίσουμε την f σε ευθείες, να μελετήσουμε εκεί την συμπεριφορά της; ΟΧΙ !

Παραδείγματα

1) $f(x,y)=3x^4-4x^2y^2+y^2=(y-3x^2)(y-x^2)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (C^∞)

Κοιτάζουμε το κρίσιμο $(x_0,y_0)=(0,0)$, $f(0,0)=0$

- $g_\lambda(x)=f(x,\lambda x)=(\lambda x-3x^2)(\lambda x-x^2)=x^2(\lambda-3x)(\lambda-x)>g_\lambda(0)=0$ για $x\neq 0$, x σε περιοχή του 0. Άρα, η g_λ έχει Τοπ. Ελ. στο 0.

- 

Η f παίρνει αρνητικές τιμές μεταξύ των $y=x^2$, $y=3x^2$, θετικές εκτός αυτών μηδέν πάνω τους. Άρα δεν έχει Τοπ. Ελ. στο $(0,0)$.

2) $g(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x(x^2+y^2)+2x^2$. Κοιτάζουμε στο κρίσιμο $(0,0)$. Τι συμβαίνει (πάλι) ;;

Να αρχίσουμε τον έλεγχο για το είδος που μπορεί να έχουν τα κρίσιμα σημεία. Είναι Ακρότατα; είναι κάτι άλλο; δεν μπορούμε να αποφανθούμε;

Εδώ χρειαζόμαστε C^2-συναρτήσεις (~~ή τουλάχιστον C^1 με 2 τάξης παραγώγους~~)

Έστω $f: A(\subseteq\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, $\vec{x}_0$ κρίσιμο, $\boxed{f\text{-}C^2}$.

Για $n=1,2,\dots$ ο κοινός τύπος που συνδέει είναι του Taylor!

$$f(\vec{x}_0+\vec{h})\cong f(\vec{x}_0)+\frac{1}{2}D_2f(\vec{x}_0)(\vec{h}) \quad (\text{για μικρά } \vec{h})$$

- Αν $D_2f(\vec{x}_0)(\vec{h})>0$, $\vec{h}\neq\vec{0}$, $f(\vec{x}_0+\vec{h})>f(\vec{x}_0)$. Τοπ. Ελάχιστο
- Αν $D_2f(\vec{x}_0)(\vec{h})<0$, $\vec{h}\neq\vec{0}$, $f(\vec{x}_0+\vec{h})<f(\vec{x}_0)$ Τοπ. Μέγιστο
- Αν , τι ;;

Ας δούμε αναλυτικά το 2-διαφορικό $D_2 f(\vec{x}_0)$ για C^2-συναρτήσεις.

<u>Τετρ. Μορφή</u> $D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} =$

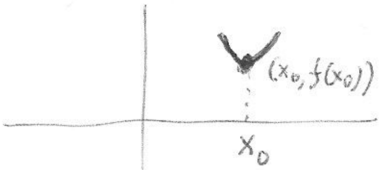
$$= (h_1, h_2, \dots, h_n) \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_1 x_2} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_1 x_n} & f_{x_2 x_n} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Εμφανίζεται ένας πίνακας, Συμμετρικός, $(n \times n)$(!) των (μερικών) παραγώγων 2-τάξης.
Ο <u>Εσσιανός πίνακας</u> της f στο $\vec{x}_0$ (του Hesse), $\boxed{H_{\vec{x}_0}}$

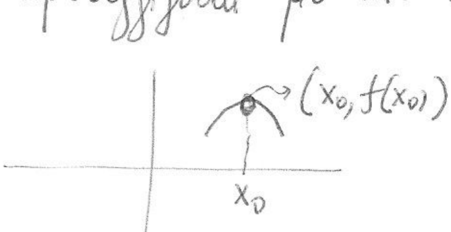
$D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \vec{h} H_{\vec{x}_0} \vec{h}^T$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $D_2 f(\vec{x}_0)(\lambda \vec{h}) = \lambda^2 D_2 f(\vec{x}_0)(\vec{h})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Γνωρίζουμε και γι' αυτόν; Βεβαίως-Βεβαίως!

- $n=1$, $D_2 f(x_0)(h) = h f''(x_0) h$, $f(x_0+h) \cong f(x_0) + h f''(x_0) h$.
  - Αν $f''(x_0) > 0$ το $f(x_0+h)$ προσεγγίζεται με την <u>παραβολή</u> $y = f(x_0) + f''(x_0) h^2$
    Η παραβολή έχει Τοπ. Ελ. στο x_0, άρα και η f.



  - Αν $f''(x_0) < 0$ το $f(x_0, h)$ προσεγγίζεται με την παραβολή $y = f(x_0) + f''(x_0) h^2$
    Η παραβολή έχει Τοπ. Μέγ. στο x_0, άρα και η f.



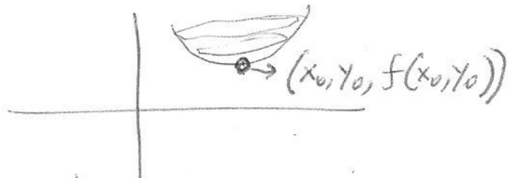
  - Αν $f''(x_0) = 0$, δεν έχουμε πληροφορία ($f(x_0+h) \cong f(x_0)$ το ξέραμε)

Τι περιμένουμε για $n=2$;

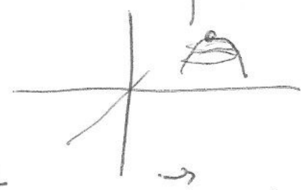
• $n=2$, $D_2 f(x_0,y_0)(h_1,h_2) = (h_1,h_2)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix}$

$= \vec{h}\, H_{(x_0,y_0)}\, \vec{h}^{\perp}$ // Τετραγωνική Μορφή

• Αν $H_{(x_0,y_0)} > 0$ το $f(x_0+h_1, y_0+h_2)$ προσεγγίζεται με το "παραβολοειδές" $z = f(x_0,y_0) + \vec{h}\, H_{(x_0,y_0)}\, \vec{h}^{\perp}$.
Το "παραβολοειδές" έχει τοπ. ελ. στο (x_0,y_0), άρα και η f.



• Αν $H_{(x_0,y_0)} < 0$ ανάλογα θα περιμένουμε τοπ. Μέγ.



• Αν υπάρχουν $\vec{h}_1 H_{(x_0,y_0)} \vec{h}_1^{\perp} < 0 < \vec{h}_2 H_{(x_0,y_0)} \vec{h}_2^{\perp}$ προσεγγίζεται με "υπερβολικό παραβολοειδές"

ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

Δεν έχουμε ορίσει θετικά, αρνητικά κά ορισμένους Πίνακες
Πώς θα ελέγξουμε αν κάτι, που δεν έχουμε ορίσει;
Πάμε στα κεφάλαια της Άλγεβρας/Γεωμετρίας. Το ψάχνουμε...
στις Τετραγωνικές Μορφές
......