# ΜΑΘΗΜΑ 14 (11-11)

## Τοπικά Ακρότατα (συνέχεια...)

Είδαμε ότι για να βρούμε (αν γίνεται) το είδος ενός Κρίσιμου Σημείου $\vec{x}_0$, συνάρτησης $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ για $n \geq 2$ χρειαζόμαστε το $d_2 f(\vec{x}_0)$, ισοδύναμα τον πίνακα των 2-μερικών παραγώγων της $f$ $\quad (f - C^2)$

## Τετραγωνικές μορφές (Quadratic forms)

Η $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $Q(\vec{x}) = \vec{x} H \vec{x}^T$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $H$ συμμετρικός ($H \neq 0$) πίνακας ($n \times n$), καλείται Τετραγωνική Μορφή με πίνακα $H$.

Π.χ

$n=1$, $\quad Q(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$

$n=2$ $\quad Q(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$, $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, $n=3$ ....

$$= (x,y) \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Αν $Q(\vec{x}) > 0$ για $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, λέμε ότι η $Q$ και ο $H$ είναι θετικά ορισμένη τετρ. μορφή, $H > 0$
- Αν $Q(\vec{x}) < 0$ για $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, λέμε ότι η $Q$ και ο $H$ είναι αρνητικά ορισμένη τετρ. μορφή, $H < 0$
- Αν υπάρχουν $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ με $Q(\vec{x}_1) \cdot Q(\vec{x}_2) < 0$ λέμε ότι η $Q$ και ο $H$ είναι μη ορισμένος.

---

Υπάρχουν και οι ορισμοί θετικά (αρνητικά) ημιορισμένοι, δεν θα ασχοληθούμε με αυτούς.

Πώς θα αναγνωρίσουμε το είδος μιας Τετρ. Μορφής; Για $n=1$ το ξέρουμε. Για $n \geq 2$ ;;

• Ας ξεκινήσουμε στον $\mathbb{R}^2$ (που βλέπουμε το $G_Q$)

πχ $Q(x,y) = 4x^2 - y^2 = (x,y)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Υπερβολικό Παραβολοειδές

Ο Η έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=-1<0<\lambda_2=4$

→ Αν δεν είναι διαγώνιος ο Η;;

πχ $Q(x,y) = x^2+4x-2y^2 = (x,y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

Να τον διαγωνοποιήσουμε! δηλ. αντί για την βάση $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ να πάρουμε άλλη, που θα μετασχηματίζεται σε διαγώνιο

Αυτό το ξέρουμε (ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα)!

Τον μετατρέπουμε στον $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, οπότε η Q γίνεται

$2X^2-3Y^2$ (X, Y οι νέες συντεταγμένες)

Υπερβολικό Παραβολοειδές.

<u>Ισχύουν τα εξής</u>

1) Έστω Η ($n\times n$) Συμμετρικός Πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και P ορθογώνιος πίνακας που τον διαγωνιοποιεί.

Η $Q(\vec{x})=\vec{x}H\vec{x}^T$ για $\vec{x}=\vec{y}P$ ανάγεται στην

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

Επίσης, $\|\vec{x}\|^2\lambda_1 (=\min\{\lambda_i : i=1,\dots,n\}) \le \vec{x}H\vec{x}^T = Q(\vec{x}) \le \|\vec{x}\|^2\lambda_n (=\max\{\lambda_i : i=1,\dots,n\})$

2) <u>Θ. Sylvester</u>

Ορίζουμε τις κύριες υποορίζουσες

$H=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$ $\Delta_1=\alpha_{11}$, $\Delta_2=\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ ---

$\Delta_n=\det H$ τότε:

i) Η $Q$ (και ο $H$) είναι Θετικά Ορισμένος $\Leftrightarrow$

$\Delta_1 > 0, \ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

ii) Η $Q$ (και ο $H$) είναι Αρνητικά Ορισμένος $\Leftrightarrow$

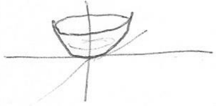
$\Delta_1 < 0, \ \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$

iii) Αν υπάρχει $\Delta_{2k} < 0$ τότε η $Q$ (και ο $H$) είναι
<u>μη</u> ορισμένος.

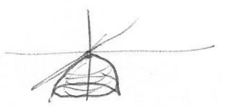
<u>Απλές περιπτώσεις στο $n=2$</u>

$\cancel{H(x,y)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad Q(x,y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$

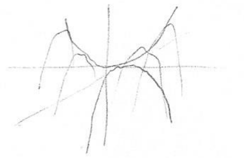
- $\lambda_1 = \Delta_1 > 0, \ \lambda_2 > 0$, άρα $\Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$
  Εχ. Παραβολοειδές
  Κυρτό / ελαχ στο $(0,0)$



- $\lambda_1 = \Delta_1 < 0, \ \lambda_2 < 0$, άρα $\Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0$
  Εχ. Παραβολοειδές
  Κοίλο/μεγ. στο $(0,0)$



- $\lambda_1 = \Delta_1 < 0, \ \lambda_2 > 0$, άρα $\Delta_2 = \lambda_1 \lambda_2 < 0$
  Υπερβολ. Παραβολοειδές
  πχ, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, $Q(x,y) = y^2 - x^2$ < Για $x=0$, ελάχιστο στο $y_0=0$ / Για $y=0$, μέγιστο στο $x_0=0$
  Σάγμα στο $(0,0)$.



---

Είμαστε έτοιμοι να ταξινομήσουμε τα Κρίσιμα Σημεία (όσα μπορούμε βέβαια)

# Ταξινόμηση Κρισίμων Σημείων συνάρτησης

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $C^2$, $\vec{x}_0 \in A$, $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$

$$H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}(\vec{x}_0)$$ ο Εσσιανός Πίνακας της $f$ στο $\vec{x}_0$.

i) Αν $H(\vec{x}_0) > 0$ $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n > 0) \Rightarrow \vec{x}_0$ Τοπ. Ελάχιστο

ii) Αν $H(\vec{x}_0) < 0$ $((-1)^k \Delta_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots n) \Rightarrow \vec{x}_0$ Τοπ. Μέγιστο

iii) Αν $H(\vec{x}_0)$ μη ορισμένος $(\exists \nu : \Delta_{2\nu} < 0) \Rightarrow \vec{x}_0$ Σαγματικό Σημείο

## Ιδιαιτέρως

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, $C^2$, $\vec{x}_0 \in A$ με $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$

$$H_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(\vec{x}_0)$$ ο Εσσιανός Πίνακας της $f$ στο $\vec{x}_0$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0), \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\Big|_{\vec{x}_0}$$

i) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow \vec{x}_0$ Τοπ. Ελάχιστο

ii) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow \vec{x}_0$ Τοπ. Μέγιστο

iii) $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow \vec{x}_0$ Σαγματικό Σημείο

---

Για υπόλοιπες περιπτώσεις εξετάζουμε κατά ... περίπτωση.

## Ασκήσεις

(I) Μελέτη συνάρτησης ως πρός τα Τοπικά Ακρότατα

1) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

Κρίσιμα σημεία : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$

$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=3x^2-3y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=3y^2-3x=0\end{aligned}\right\}$ Λύσεις $(x_1,y_1)=(0,0),\ (x_2,y_2)=(1,1)$

Εσσιανός πίνακας $H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$

- $(x_1,y_1)=(0,0)$, $\det H_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9<0.$ Σαγματικό Σημείο.
- $(x_2,y_2)=(1,1)$, $\det H_{(1,1)} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36-9>0$

  $\left.\begin{aligned}&\\ &\Delta_1(1,1)=6>0\end{aligned}\right\}$ Τοπ. Ελάχιστο.

2) $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$

Κρίσιμα σημεία : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0.$

Λύσεις : $(x_1,y_1)=(0,0)$, $(x_2,y_2)=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(x_3,y_3)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$

- $(x_1,y_1)=(0,0)$.

$\det H(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16-16=0$ (;)

$\begin{cases} f(x,x)=2x^4>f(0,0)=0, & x\neq 0 \\ f(x,-x)=2x^4-8x^2=+2x^2(x^2-4)<0=f(0,0) & (x \text{ κοντά στο } 0)\end{cases}$

Άρα, το $(x_1,y_1)=(0,0)$ <u>δεν</u> είναι Τοπ. Ακρότατο, Σάγμα.

14

- $(x_2, y_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , $(x_3, y_3) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ Ίδια συμπεριφορά
(Συμμετρία Συνάρτησης)

$$\det H_{(\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 16 > 0$$

$$\Delta_1 = 20 > 0$$

$(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ Τοπ. Ελάχιστο

3) $$f(x,y,z) = \frac{e^{x+y+z}}{(1+e^x)(e^x+e^y)(e^y+e^z)(1+e^z)}$$

$$f_x = \left[1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{e^x+e^y}\right] f$$

$$f_y = \left[1 - \frac{e^y}{e^x+e^y} - \frac{e^y}{e^y+e^z}\right] f \qquad (f>0)$$

$$f_z = \left[1 - \frac{e^z}{1+e^z} - \frac{e^z}{e^z+e^y}\right] f$$

$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2x_0$
$f_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow 2y_0 = x_0 + z_0$
$f_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2z_0$

$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{64}$$

$\Delta_1 = \frac{-2}{64} < 0$ , $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{3}{64} > 0$ , $\Delta_3 = -\frac{4}{64} < 0$ / Το $(0,0,0)$ Τοπ. ΜΕΓΙΣΤΟ

4) $f(x,y)=x^4-2x^2+1-y^2$

5) $f(x,y)=(x-5)\ln(xy)$ , $x,y>0$

(II) 6) Έστω $\vec F : A(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$, $C^1$ και $\det J_{\vec F}(\vec x)\neq 0$ για κάθε $\vec x\in A$.
Τότε <u>δεν</u> υπάρχει $\vec\alpha\in A$ ώστε η $\|\vec F(\vec\alpha)\|\geq\|\vec F(\vec x)\|$, $\vec x\in A$.

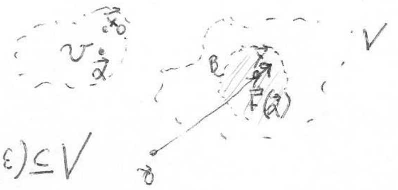
<u>(Αρχή Μεγίστου)</u>

Έστω ότι υπάρχει $\vec\alpha\in A$ με $\|\vec F(\vec\alpha)\|\geq\|\vec F(\vec x)\|$, $\vec x\in A$.

• Αν $\|\vec F(\vec\alpha)\|=0 \Rightarrow \vec F(\vec x)=\vec 0$, $\vec x\in A$. Άρα, ο πίνακας $J_{\vec F}(\vec x)=$ Μηδενικός Πίνακας
Άτοπο.

Άρα, $\|\vec F(\vec\alpha)\|>0$

• Η $\vec F$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο $\vec\alpha$ (Θ. Αντίστροφης Συν.). Άρα υπάρχουν $U, V\subseteq\mathbb{R}^n$ <u>ανοικτά</u> ώστε $\vec F: U\to V$, 1-1, <u>επί</u> με $\vec\alpha\in U$, $\vec F(\vec\alpha)\in V$.




$\vec F(\vec\alpha)\in V=$ανοικτό $\Rightarrow \exists\, B(\vec F(\vec\alpha),\varepsilon)\subseteq V$

Το $\vec y_0=\vec F(\vec\alpha)+\dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{\vec F(\vec\alpha)}{\|\vec F(\vec\alpha)\|}\in B(\vec F(\vec\alpha),\varepsilon)\subseteq V$

Η $\vec F$ επί του $V \Rightarrow \exists\ \vec x_0\in U : \vec F(\vec x_0)=\vec y_0$

Τότε $\|\vec F(\vec x_0)\|=\|\vec y_0\|=\left(1+\dfrac{\varepsilon}{2\|\vec F(\vec\alpha)\|}\right)\|\vec F(\vec\alpha)\| > \|\vec F(\vec\alpha)\|$ Άτοπο !

7) <u>Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων</u>

Δίνονται κ διαφορετικά σημεία $(\alpha_i, b_i)\in\mathbb{R}^2$, $i=1,2,\dots,k$ $(k\geq 3)$
Ζητείται ευθεία $y=ux+v$, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων $\delta_i=u\alpha_i+v-b_i$, $i=1,2,\dots,k$, των σημείων από την ευθεία να γίνει ελάχιστο.

Λύση

$$f(u,v)=\sum_{i=1}^{k}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{k}\left(u\alpha_i+v-b_i\right)^2 \quad , (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

Κρίσιμα Σημεία

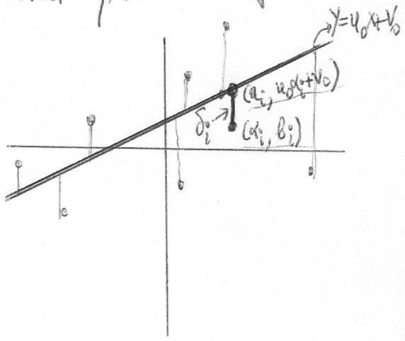
$$0=f_u(u,v)=2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left(u\alpha_i+v-b_i\right)=2\left[u\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2+v\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-\sum_{i=1}^{k}b_i\right]$$

$$0=f_v(u,v)=2\left[u\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+kv-\sum_{i=1}^{k}b_i\right]$$ / Σύστημα 2-εξισώσεων, με 2 αγνώστους

Ορίζουσα του Συστήματος: $$\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2 & \sum_{i=1}^{k}\alpha_i \\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i & k\end{vmatrix}=k\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)^2 \underset{(C-S)}{>} 0 \;(*)$$

Άρα το σύστημα $f_u(u,v)=0$, $f_v(u,v)=0$ έχει μοναδική λύση

$$\left.\begin{aligned} u_0&=\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)-k\sum_{i=1}^{k}a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)^2-k\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\right)} \\ v_0&=\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_ib_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\right)^2-k\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2\right)}\end{aligned}\right\}$$




Εσσιανός Πίνακας (σε κάθε $(u,v)\in\mathbb{R}^2$)

$$H=\begin{pmatrix}2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2 & 2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i \\ 2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i & 2k\end{pmatrix}, \quad \Delta_1=2\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2>0, \quad \Delta_2>0 \text{ (από } (*))$$

(η $f$ είναι Γνήσια Κυρτή στο $\mathbb{R}^2$) Άρα, το $(u_0,v_0)$ είναι Τοπ. Ελάχιστο
(ουσιαστικά Ολικό Ελάχιστο)

---

Σχόλιο Η ευθεία $y=u_0x+v_0$ περνά από τα σημεία

$\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i, \sum_{i=1}^{k}b_i\right)=$ Κέντρο βάρους των $\{(\alpha_i,b_i), i=1,..,k\}$, μάζα 1 στο καθένα

$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}\left(\sum\alpha_i^2, \sum_{i=1}^{k}\alpha b_i\right)=$ >> >> μάζα $\alpha_i$ στο $(\alpha_i, b_i)$, $i=1,..,k$