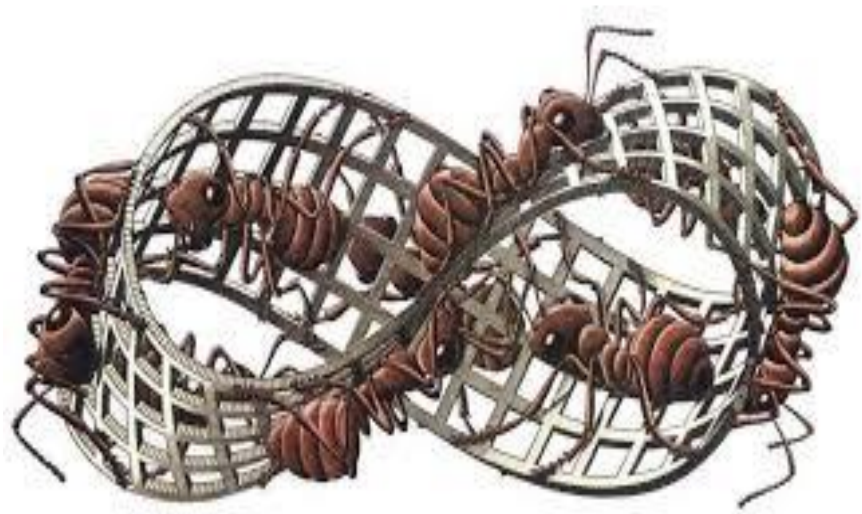
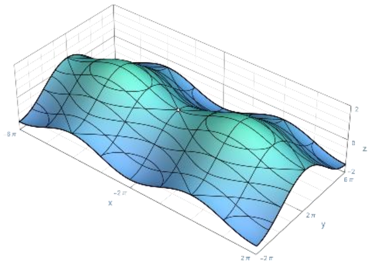
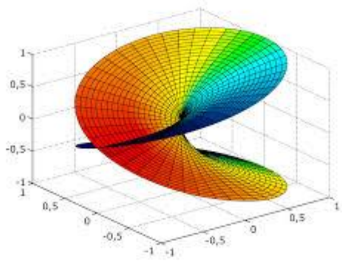
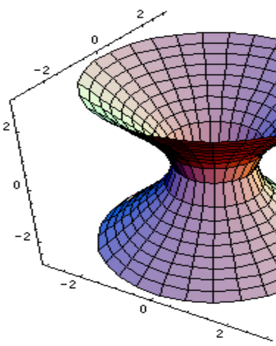
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

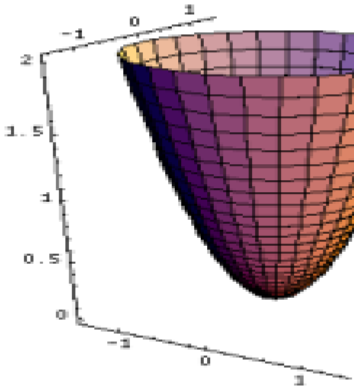


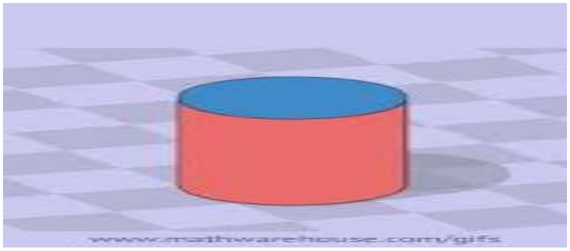
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 2020-21 (Χ)

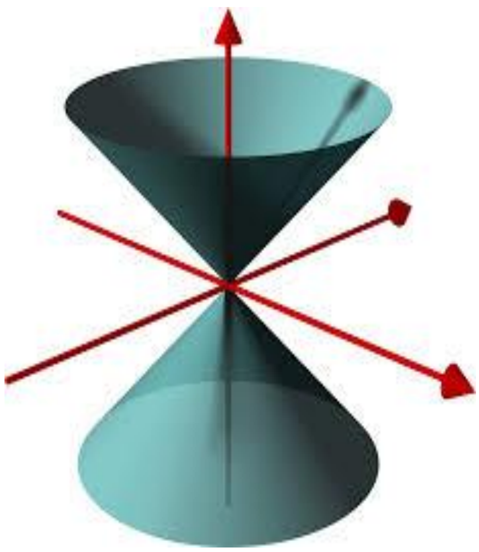









www.mathwarehouse.com/gifs



Κεφ. 9 Επιφανειακά Ολοκληρώματα.

S επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$

• Πώς περιγράφεται :

(α) $\vec{r}: D(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$ (C^1), $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ με $(u,v)\in D$

$\vec r$, Παραμέτρηση της S, $D=$ κλειστό + συνεκτικό, $(\overline{K^\circ}=K)$

(β) Γράφημα $f:A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$ (C^1)

$G_f=\{(x,y,z) : z=f(x,y)$ για $(x,y)\in A\}$

(γ) Σύνολο Στάθμης $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (C_1) τοπικά.

→ Τι θα θέλαμε να υπολογίσουμε για "καλές" επιφάνειες

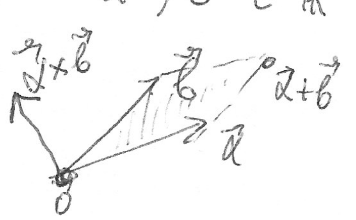
(I) $A(S)$ το εμβαδόν της S

(II) Για $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ βαθμωτό πεδίο (πχ θερμοκρασία, πυκνότητα...) να βρούμε το συνολικό β.π πάνω στην S (π.χ μέση τιμή, κέντρο βάρ.)

(III) Για $\vec F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο (π.χ ταχυτήτων, ταχ. ρευστού..) να βρούμε τον ρυθμό ροής δια μέσου της S.

Τι γνωρίζουμε ;

Εάν $\vec\alpha,\vec\beta\in\mathbb{R}^n$ $(n=3)$ γρ. ανεξάρτητα, τότε



το εμβαδόν A του Παραλληλογράμμου Π με κορυφές τα $\vec 0,\vec\alpha,\vec\alpha+\vec\beta,\vec\beta$ είναι

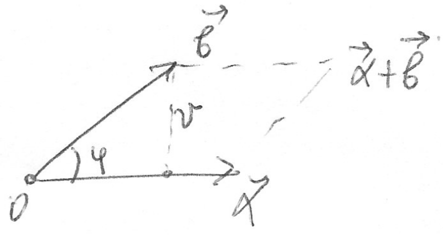
$$\boxed{A(\Pi)=\|\vec\alpha\times\vec\beta\|}$$

Να το θυμηθούμε :

· $\| \vec{\alpha}\times\vec{b}\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix} = (\alpha_2 b_3-\alpha_3 b_2,\ \alpha_3 b_1-\alpha_1 b_3,\ \alpha_1 b_2-\alpha_2 b_1)$

$\|\vec{\alpha}\times\vec{b}\| = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{b}\|$ ημφ , φ η γωνία των $\vec{\alpha},\vec{b}$. (1)

·

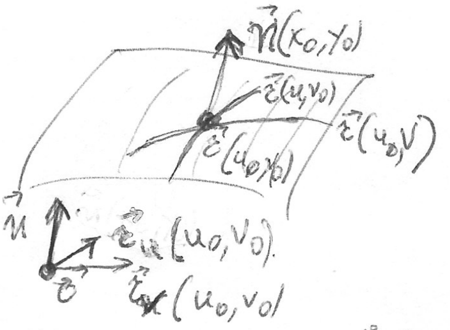


$A(M) = \|\vec{\alpha}\|\cdot\upsilon = \|\vec{\alpha}\|\|\vec{b}\|$ ημφ (2).

Άρα (1),(2) $A(M) = \|\vec{\alpha}\times\vec{b}\|$.

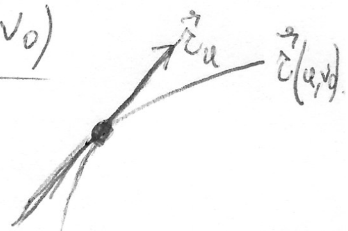
Κάθετο διάνυσμα σε σημείο επιφάνειας S.

(α) $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$



· Σταθεροποιούμε το $v=v_0$

Πάνω στην S εμφανίζεται μια καμπύλη $\vec{r}(u,v_0)$. Η εφαπτομένη ευθεία στο $\vec{r}(u_0,v_0)$ είναι παράλληλη στο $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)_{(u_0,v_0)} \overset{\text{συμβ.}}{=} \vec{r}_u(u_0,v_0)$



· Σταθεροποιούμε το $u=u_0$

Πάνω στην S εμφανίζεται μια καμπύλη $\vec{r}(u_0,v)$. Η εφαπτομένη ευθεία στο $\vec{r}(u_0,v_0)$ είναι παράλληλη στο $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{(u_0,v_0)} \overset{\text{συμ.}}{=} \vec{r}_v(u_0,v_0)$

Αν τα $\vec{r}_u(u_0,v_0)$, $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ είναι γρ. ανεξάρτητα, το
$\vec{n}(\vec{r}(u_0,v_0)) = (\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u_0,v_0) \perp \vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0,v_0)$.

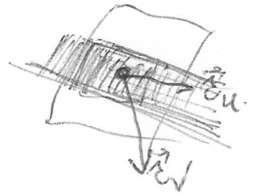
Συνήθως γράφουμε $\vec{n}(u_0,v_0)$

Για S, $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$

ορίζουμε το $\vec{n}(u_0,v_0) \perp S$ στο $\vec{r}(u_0,v_0)$.

Το εφαπτόμενο επίπεδο στην S στο $\vec{r}(u_0,v_0)$ είναι

$$\vec{\ell}(t,s)=\vec{r}(u_0,v_0)+t\,\vec{r}_u(u_0,v_0)+s\,\vec{r}_v(u_0,v_0)\,,\quad (t,s)\in\mathbb{R}^2.$$



Ορισμοί

Η επιφάνεια S, $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ καλείται

i) Λεία ή Ομαλή $\Leftrightarrow$ $\vec{n}(u_0,v_0)=\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)\neq\vec{0}$ για $(u_0,v_0)\in D$.

ii) Απλή $\Leftrightarrow$ αν η $\vec{r}$ είναι 1-1

iii) Κανονική αν είναι Λεία και Απλή

iv) Κλειστή αν περικλείει "καλό" σύνολο στον $\mathbb{R}^3$ (πχ xy αφρό κτλ)
δηλ. η S είναι το σύνορο στερεού $B\subseteq\mathbb{R}^3$.

(β) $S=G_f$ γράφημα $f: A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in A$, $z_0=f(x_0,y_0)$

Γνωρίζουμε, ότι το $\vec{n}(x_0,y_0,z_0)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)_{(x_0,y_0)}$ είναι κάθετο στην S.

(γ) S Σύνολο Στάθμης $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ με $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

Γνωρίζουμε ότι το $\vec{n}(x_0,y_0,z_0)=\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο στο G_f, όπου $\begin{cases} F(x,y,f(x,y))=0 \text{ σε περιοχή του } (x_0,y_0). \\ f(x_0,y_0)=z_0 \end{cases}$

Να τα συμπαξέψουμε.

Κάθετο διάνυσμα σε σημείο της επιφάνειας S

(α) S , $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$, λεία , $\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

$$*\vec{n}=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|,\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|,\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right)$$

Μέτρο/Νόρμα : $*\|\vec{n}\|=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|=\left[\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}^2\right]^{1/2}$

$(|\cdot| = \det)$

(β) S γράφημα $f:A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$ / $\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y))$, $(x,y)\in A$.

$*\vec{n}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\right)$ / S πάντοτε είναι λεία.

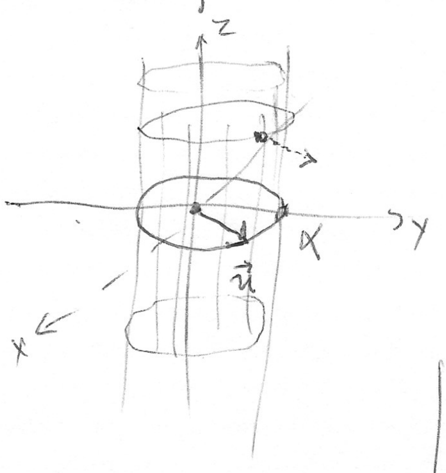
Μέτρο/Νόρμα : $*\|\vec{n}\|=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1\right]^{1/2}$

(γ) S σύνολο στάθμης $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$

Ανάγεται στο (β) τοπικά.

Ασκήσεις

1) S η επιφάνεια Κυλίνδρου, ακτίνας $\alpha(>0)$ βάσης. Να ευρεθεί το κάθετο διάνυσμα και το μέτρο του.



$\vec{r}(u,v)=(\alpha\sigma\upsilon\nu u,\alpha\eta\mu u,v)$, $(u,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\vec{r}_u(u,v)=(-\alpha\eta\mu u,\alpha\sigma\upsilon\nu u,0)\\ \vec{r}_v(u,v)=(0,0,1)\end{cases}$$

$\vec{n}(u,v)=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)(u,v)=(\alpha\sigma\upsilon\nu u,\alpha\eta\mu u,0)$

$\|\vec{n}(u,v)\|=\alpha$

2) S επιφάνεια Σφαίρας ακτίνας $\alpha (>0)$
Να ευρεθεί το Κάθετο διάνυσμα και το μέτρο του.

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=(\alpha\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ \alpha\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi)$$
$$(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

$$\begin{cases}\vec{r}_\theta(\theta,\varphi)=(-\alpha\,\eta\mu\varphi\,\eta\mu\theta,\ \alpha\,\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ 0)\\ \vec{r}_\varphi(\theta,\varphi)=(\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\theta,\ -\alpha\,\eta\mu\varphi)\end{cases}$$

$$\vec{n}(\theta,\varphi)=(\vec{r}_\theta\times\vec{r}_\varphi)(\theta,\varphi)=-\alpha\,\eta\mu\varphi\,\vec{r}(\theta,\varphi)$$
$$\|\vec{n}(\theta,\varphi)\|=\alpha^2\,\eta\mu\varphi\quad(>0,\ \varphi\in(0,\pi))$$

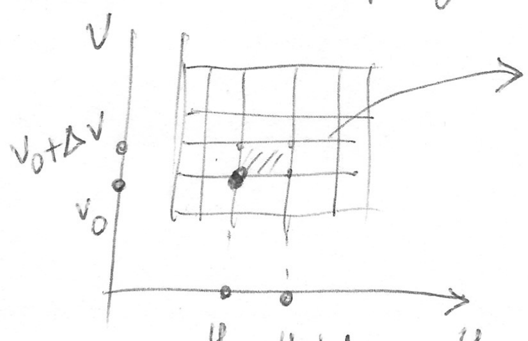
"Ισχύουν ανάλογες ιδιότητες για Αναπαραμετρήσεις της S"

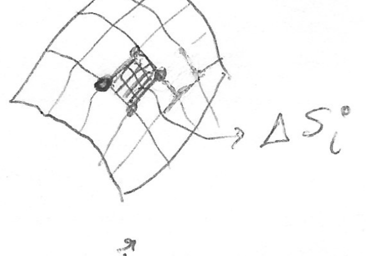
(I) <u>Εμβαδόν Επιφανείας S</u> ($\underline{C^1}$, <u>Λεία</u>)

- Έστω $S:\vec{r}(t,s)=t\vec{b}+s\vec{\gamma}$, $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$ η επιφάνεια Παραλληλογράμμου Π

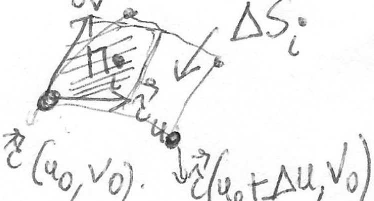
Γνωρίζουμε ότι $A(\Pi)=\|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|=\|\vec{r}_t\times\vec{r}_s\|$
$(\vec{b}\times\vec{\gamma}\neq\vec{0})$

- Έστω $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in D=$ ορθογώνιο $(\subseteq\mathbb{R}^2)$ <u>Λεία</u>





$$\Delta S_i\cong A(\Pi_i)=$$
$$=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,\Delta u\,\Delta v$$



$$\vec{r}(u_0+\Delta u,v_0)-\vec{r}(u_0,v_0)\simeq\vec{r}_u(u_0,v_0)\,\Delta u$$
$$\vec{r}(u_0,v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)\simeq\vec{r}_v(u_0,v_0)\,\Delta v$$

• S $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ (κλειστό, σύνολο, $\subseteq \mathbb{R}^2$) $\underline{1-1}$ $\mathcal{C}^1$

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv = \iint_S dS$$

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv.$$

Το <u>εμβαδόν της επιφάνειας S.</u>

(II) <u>Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Βαθμωτής Συνάρτησης</u>

Με ανάλογη διαδικασία και σκεπτικό με το επικ. ολ. $\int_\Gamma f\, ds$, αν $f : A (\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ συνεχής, και

S επιφάνεια (ομαλή), $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ με $\vec{r}(D) \subseteq A$.

ορίζουμε
$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv.$$

$$dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv$$

(III) <u>Επιφανειακό Ολοκλήρωμα Διανυσματικού Πεδίου</u>

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (συνεχής), $\vec{F} = (P, Q, R)$ και S επιφάνεια ($\mathcal{C}^1$, λεία) $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u,v))\, du\, dv \quad // \; d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$$

<u>Σχέση Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων για λείες Επιφάνειες</u>

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{N})\, dS$$

όπου $N = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ (μοναδιαίο κάθετο.