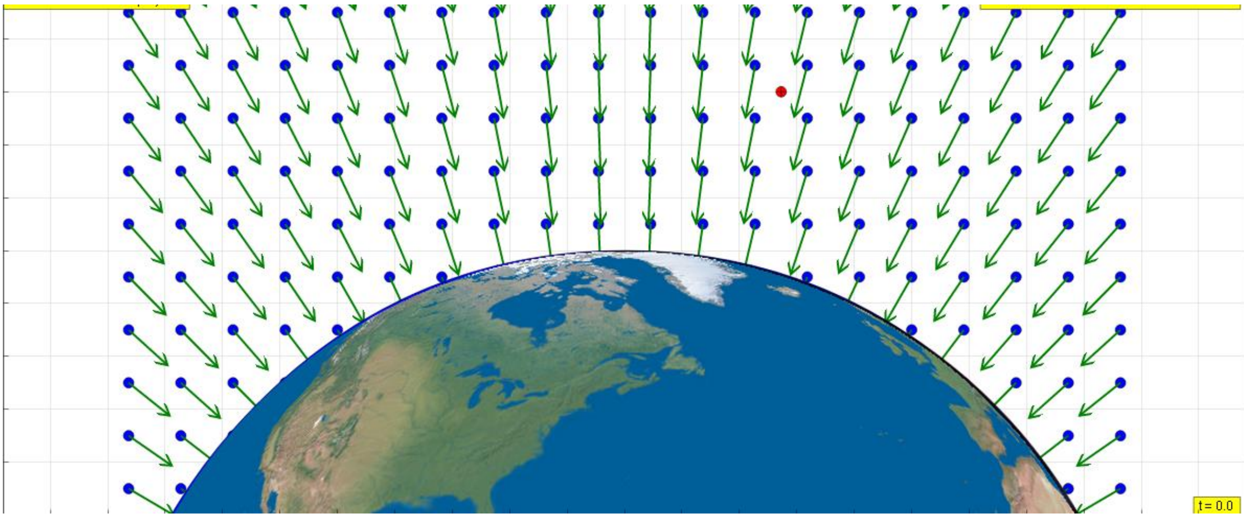
ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ Δ.Π./ΠΕΔΙΑ ΚΛΙΣΕΩΝ



**

Μάθημα 24 (4-12-20)

ΚΕΦ 10 Ⓐ Συντηρητικά Διαν. Πεδία, Θ.Θ. Ανεξαρτησίας Επικ. Ολ.

Ⓑ Στροβιλισμός, Αστρόβιλα Διαν. Πεδία.

Ⓒ Σχέση Συντηρητικών με Αστρόβιλα (Διαν. Πεδία) (1η προσέγγιση)

Στο Κεφάλαιο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε Πεδία Ορισμού των δ.π. ειδικής μορφής:

Ορισμοί $A \, (\subseteq \mathbb{R}^n, \; n=1,2,3)$.

i) A καλείται **ΚΥΡΤΟ** $\Leftrightarrow$ για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in A$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$ το ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{\alpha}, \vec{\beta}] \subseteq A$.

ii) A καλείται **ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ** $\Leftrightarrow$ για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in A$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, υπάρχει Πολυγωνική Γραμμή $\Pi = [\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_0, \vec{\alpha}_1] \cup [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2] \cup \ldots \cup [\vec{\alpha}_k, \vec{\alpha}_{k+1} = \vec{\beta}] \subseteq A$

iii) A καλείται **κατά ΤΟΞΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ** $\Leftrightarrow$ για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in A$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$, υπάρχει συνεχής καμπύλη Γ, $\vec{r}: [\gamma, \delta] \to A$ με $\vec{r}(\gamma) = \vec{\alpha}$, $\vec{r}(\delta) = \vec{\beta}$

Προφανώς i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii)

, A είναι πολ. συνεκτικό $\not\Rightarrow$ A κυρτό. (ii) $\not\Rightarrow$ i))
(για $n=1$, ισχύει ii) $\Rightarrow$ i)).

, A είναι κατά τόξα συνεκτικό $\not\Rightarrow$ A πολ. συνεκτικό (iii) $\not\Rightarrow$ ii))
(για $n=1$, ισχύει iii) $\Rightarrow$ ii)).

Ισχύει: (α) Εάν το A είναι Ανοικτό και κατά τόξα συνεκτικό τότε είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

(β) Εάν το A είναι Ανοικτό και Συνεκτικό τότε είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Τόπος = Ανοικτό + Συνεκτικό σύνολο

Ⓐ Συντηρητικά Διαν. Πεδία.

$\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $A =$ τόπος , $\vec{F}$

Το δ.π $\vec{F}$ καλείται <u>Συντηρητικό</u> $\Leftrightarrow$ υπάρχει $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\underline{\vec{F} = \nabla f}$ (Συντηρητικό ή <u>Πεδίο Κλίσεων</u>)

$n=1$, $F =$ συντηρητικό στο $I \Leftrightarrow F = f'$ για κάποια $f: I \to \mathbb{R}$
($I \subseteq \mathbb{R}$, $I =$ ανοικτό + συνεκτικό , δηλ. $I =$ ανοικτό διάστημα)

$n=2$ $\vec{F} = (P, Q): A(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ είναι Συντηρητικό $\Leftrightarrow$ υπάρχει $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε , $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ στο A.

$n=3$ $\vec{F} = (P, Q, R): A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ είναι Συντηρητικό $\Leftrightarrow$ υπάρχει $f: A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε , $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$ στο A.

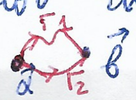
<u>Σχόλιο</u>
Έχουμε αποδείξει (από ΘΜΤ) ότι η f είναι Μοναδική, με την έννοια ότι: αν $\vec{F} = \nabla f = \nabla g$ τότε $g = f + c$.

Θεώρημα Συντηρητικών δ.π / Ανεξαρτησία Επικ. Ολοκληρώματος

$\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ συνεχές δ.π, $\underline{A}$-τόπος ΤΣΕΙ.

(α) $\vec{F}$ Συντηρητικό. $(\vec{F} = \nabla f)$

(β) Το επικ. Ολοκλήρωμα είναι <u>Ανεξάρτητο</u> <u>από τον δρόμο</u> στο A, δηλ. για $\vec{a}, \vec{b} \in A$ το $\int_{\vec{a}\vec{b}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο από την C^1 καμπύλη $\vec{r}: [\gamma, \delta] \to \underline{A}$, που τα συνδέει

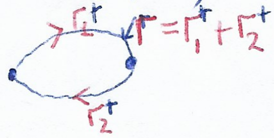


(γ) Για καμπύλη Γ, Κλειστή, C^1 του $\underline{A}$ ισχύει

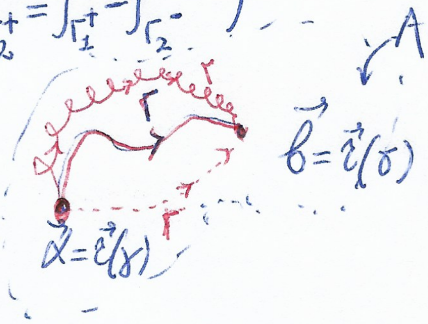
$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Θα αποδείξουμε για $n=2$, $\alpha \Longleftrightarrow \beta$

($\beta \Longleftrightarrow \gamma$ εύκολο:



, $\oint_\Gamma = \int_{\Gamma_1^+} + \int_{\Gamma_2^+} = \int_{\Gamma_1^+} - \int_{\Gamma_2^-}$) . . .



α) ⇒ β) $\vec{F} = \nabla f$ ($\Rightarrow f\ C^1 / \vec{F} =$ συνεχής)

Έστω Γ, $\vec{r} : [\gamma, \delta] \to A$, C^1

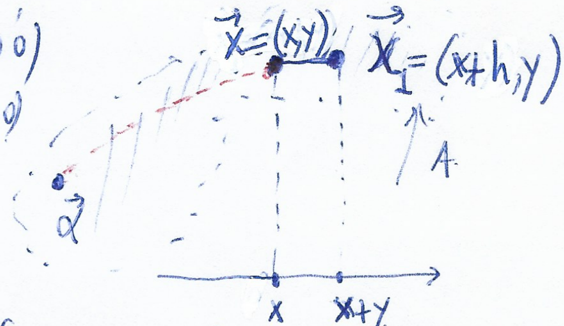
με $\vec{r}(\gamma) = \vec{\alpha}$, $\vec{r}(\delta) = \vec{\beta}$

$$(f \circ \vec{r})'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t), \quad t \in [\gamma, \delta] \quad (*)$$

$$\underline{\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}} = \int_\gamma^\delta \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \int_\gamma^\delta \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \overset{(*)}{=} \int_\gamma^\delta (f \circ \vec{r})'(t)\, dt \ \underline{\overset{\text{ΘΘΑΠ}}{=}}$$

$$= f(\vec{r}(\delta)) - f(\vec{r}(\gamma)) = \underline{f(\vec{\beta}) - f(\vec{\alpha})}$$ Ανεξάρτητο της Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$

β) ⇒ α) Έστω $\vec{F} = (P, Q)$, $\begin{cases} \vec{\alpha} \in A \text{ (σταθερό)} \\ \vec{x} \in A \text{ (τυχαίο)} \end{cases}$



Αφού ισχύει το β)

έχει έννοια $\displaystyle\int_{\widehat{\alpha x}} \vec{F} \cdot d\vec{r} =: f(\vec{x})$

Θα αποδείξουμε ότι $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = P(x,y)$ $(h \neq 0)$

Έστω $[(x+h, y), (x,y)] \subseteq A$ (= ανοικτό)

$$f(x+h,y) - f(x,y) = \int_{\widehat{\alpha x_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\widehat{\alpha x}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{x x_1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

$[\vec{x}, \vec{x}_1]$ έχει εξίσωση $\vec{r}(t) = (x,y) + (t, 0)$, $t \in [0, h]$, $\vec{r}\,'(t) = (1, 0)$

Άρα, $f(x+h,y) - f(x,y) \overset{(1)}{=} \displaystyle\int_0^h P(x+t, y)\, dt \ \underset{(\text{ολοκλ})}{\overset{\text{ΘΜΤ}}{=}} \ h \cdot P(x + \theta h, y) \quad (2)$

για κάποιο $\theta = \theta(h) \in (0,1)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \overset{(2)}{=} \lim_{h \to 0} P(x + \theta h, y) \overset{P = \text{συν.}}{=} P(x,y)$$

δηλ. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$

Ανάλογα, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$.

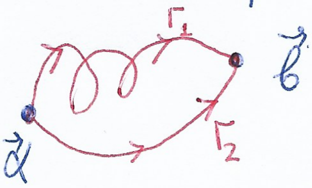
//

Δεν ξεχνάμε

• Εάν $\vec F = \nabla f$ τότε για $\vec \alpha, \vec b \in A$ έχουμε

$$\int_\Gamma \vec F \cdot d\vec r = f(\vec b) - f(\vec \alpha)$$

για τυχαία C^1 καμπύλη Γ $\vec r : [\gamma, \delta] \to \underline{A}$ με $\vec r(\gamma) = \vec \alpha$, $\vec r(\delta) = \vec b$



Συμβολίζουμε την κοινή τιμή του ολοκληρώματος $\int_{\vec\alpha}^{\vec b} \vec F \cdot d\vec r$ ή $\int_{\widehat{\vec\alpha \vec b}} \vec F \cdot d\vec r$.

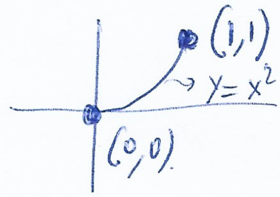
Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι το δ.π. $\vec F(x,y) = (2xy, x^2)$ είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το $I = \int_\Gamma \vec F \cdot d\vec r$, $\Gamma : y = x^2$ για $x \in [0,1]$

. Ζητάμε $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2$.

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow f(x,y) = \int (2xy)\, dx = x^2 y + \varphi_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \Rightarrow f(x,y) = \int x^2\, dy = x^2 y + \varphi_2(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow \varphi_1(y) = \varphi_2(x) = c$$

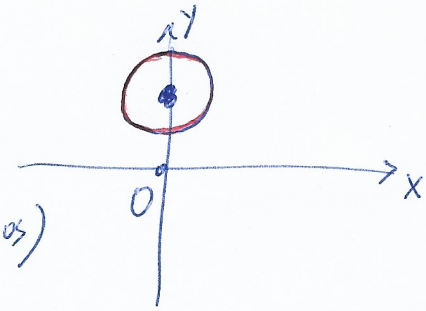
Άρα για την $f = x^2 y + c$ ισχύει $\nabla f = \vec F$.



• $\int_\Gamma \vec F \cdot d\vec r = f(1,1) - f(0,0) = 1$ //

2) Να υπολογιστεί το $\int_\Gamma (2x \ln y + y^x \ln y)\, dx + \left(\frac{x^2}{y} + x y^{x-1}\right) dy$ στην κλειστή καμπύλη $\Gamma : x^2 + (y-2)^2 = 1$

Μήπως το $\vec{F}=(P,Q)$, όπου



$P=2x\ln y+y^x\ln y$

$Q=\frac{x^2}{y}+xy^{x-1}$ / $(x,y)\in A=\{(x,y): y>0\}$ (= Τόπος)

είναι Συντηρητικό δ.π ;

Ζητάμε $f: A\to\mathbb{R}$ με

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2x\ln y+y^x\ln y \Rightarrow f(x,y)=\int(2x\ln y+y^x\ln y)dx=x^2\ln y+y^x+\varphi_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2}{y}+xy^{x-1} \Rightarrow f(x,y)=\int\left(\frac{x^2}{y}+xy^{x-1}\right)dy=x^2\ln y+y^x+\varphi_2(x) \end{cases}$$

Άρα $(\varphi_1(y)=\varphi_2(x)=c)$ $f(x,y)=x^2\ln y+y^x+c$.

$\vec{F}=\nabla f$, $\vec{F}$ Συντηρητικό

• $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$, Γ = κλειστή καμπύλη //

(Ιούλιος 2020)

3) Να υπολογιστεί $\int_\Gamma (2xy+z-1)\,dx+(x^2+2yz^2)\,dy+(2y^2z+x-2z)\,dz$

όπου Γ, $\vec{r}(t)=\left(\frac{t}{4}, \frac{t}{4}\cos t, \sqrt[3]{t^8}\sin t\right)$, $t\in[0,4\pi]$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2xy+z-1 \Rightarrow f(x,y,z)=yx^2+zx-x+\varphi_1(y,z) \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2yz^2 \Rightarrow f(x,y,z)=yx^2+y^2z^2+\varphi_2(x,z) \quad (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}=2y^2z+x-2z \overset{(1)}{=} 0+x+\frac{\partial \varphi_1(y,z)}{\partial z} \quad (*) \end{cases}$$

$$\overset{(2)}{=} 0+2y^2z+\frac{\partial\varphi_2(x,z)}{\partial z} \quad (**)$$

$(*)$ $\frac{\partial\varphi_1(y,z)}{\partial z}=2y^2z-2z \Rightarrow \varphi_1(y,z)=y^2z^2-z^2+\varphi_3(y)$

$(**)$ $\frac{\partial\varphi_2(x,z)}{\partial z}=x-2z \Rightarrow \varphi_2(x,z)=xz-z^2+\varphi_4(x)$

Αντικαθιστούμε στην

(1) $f(x,y,z)=x^2y+zx-x+y^2z^2-z^2+\varphi_3(y)$

και στη

(2) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z^2+zx-z^2+\varphi_4(x)$ $\Big\}$ $-x+\varphi_3(y)=\varphi_4(x)$

$\Rightarrow \varphi_3(y)=c_0,\ \varphi_4(x)=-x+c_0$

Τελικά: $f(x,y,z)=x^2y+xz-x+y^2z^2-z^2+c_0$. (✓ μετά από έλεγχο)

Το $\vec{F}$ είναι Συντηρητικό

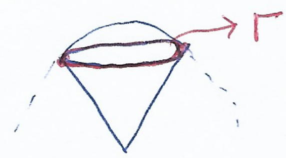
- $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=f(\vec{r}(4\pi))-f(\vec{r}(0))=f(\pi,\pi\underbrace{\cos(4\pi)}_{=1},(4\pi)^{8/3}\underbrace{\sin(4\pi)}_{=0})-f(0,0,0)$

$=\pi^2+\pi\cdot 0-\pi+\pi^2\cdot 0-0=\pi^2-\pi$ //

4) Να υπολογιστεί το $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $F(x,y,z)=(2xz\cos(x^2+y), z\cos(x^2+y), \sin(x^2+y))$ όπου Γ είναι η τομή του Κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ με τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$.

Εύκολα βρίσκουμε $f(x,y,z)=z\cdot\sin(x^2+y)+c$. $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Και $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ (Γ κλειστή καμπύλη)



5) Να υπολογιστεί $I=\int_\Gamma ye^{xy}dx+xe^{xy}dy+dz$

όπου Γ η τομή του $z=\frac{1}{10}x^2+y^2$ (Ελλειπτικό Παραβολοειδές) με το επίπεδο $z=8$.

$(f(x,y,z)=e^{xy}+z+c,\ I=0)$

6) Να αποδειχθεί ότι το $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{1}{xy}+x^2+y^2,\ -\frac{\ln x}{y^2}+2xy+y^2\right)$

είναι Συντηρητικό στο $D=\{(x,y):\ x>0,\ y\neq 0\}$

$\left(f(x,y)=\frac{\ln(x)}{y}+\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+xy^2+c\right.$, D δεν είναι συνεκτικό
Δυο χωριστά)

Δυο Επώνυμα Συντηρητικά Διαν. Πεδία (Μάθημα 12,6-11)

1) $\vec{F}(\vec{r})=\dfrac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{r}=(x,y)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$ με
Λογαριθμικό δυναμικό $V(\vec{r})=\ln\frac{1}{r}$ (Αρμονική Συνάρτηση)

2) $\vec{F}(\vec{r})=c\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{r}(x,y,z)=(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(x,y,z)\neq(0,0,0)$
με Δυναμικό $V(\vec{r})=\frac{c}{r}$ (Αρμονική Συνάρτηση)
($\vec{F}$ Πεδίο Βαρύτητος / Ηλεκτροστατικό, ανάλογα με την σταθερά)

(B) $\vec{F}=(P,Q,R): B(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$. (P, Q, R μερικώς παραγωγίσιμες)
B ανοικτό σύνολο. Έστω $(x_0,y_0,z_0)\in B$

Ορισμός

- Το διάνυσμα $\nabla\times\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\operatorname{curl}\vec{F}(x_0,y_0,z_0)=\operatorname{rot}\vec{F}(x_0,y_0,z_0)$

$$\overset{\text{συμβ}}{=}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} \overset{\text{ορισ.}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0,z_0)}\vec{k}$$

καλείται (διάνυσμα) <u>Στροβιλισμός του $\vec{F}$ στο (x_0,y_0,z_0)</u>

- Αν $\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,0)$, $(x,y,z)\in B$ το $\vec{F}$ καλείται <u>Αστρόβιλο</u> δ.π ή <u>Διαν. Πεδίο μηδενικού στροβιλισμού</u>

Αν $\vec{F}(x,y)=(P,Q)_{(x,y)}$, $(x,y)\in D(\subseteq\mathbb{R}^2)$, D= ανοικτό
εμβαπτίζουμε το $\vec{F}$ στον $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y),Q(x,y),\underset{R}{\underset{\parallel}{0}}),\quad \operatorname{curl}\vec{F}(x,y)=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\vec{k}$$

Γ) Έστω $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}=(P,Q,R)$, C^1, A = ΤΟΠΟΣ

Εάν το $\vec{F}=\nabla f$ δηλ. είναι Συντηρητικό/πεδίο κλίσεων
τότε το $\vec{F}$ είναι Αστρόβιλο $\boxed{\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}}$
Το αντίστροφο δεν ισχύει!!

Πράγματι: $\vec{F}=\nabla f$, $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$, $R=\frac{\partial f}{\partial z}$ στο A.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \underset{f-C^2}{\overset{\text{Θ. Μεικτών Παρ.}}{=}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ανάλογα, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

Άρα $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Παράδειγμα

Αστρόβιλου, ΟΧΙ Συντηρητικού Δ.Π. σε ΤΟΠΟ

$\vec{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)=(P,Q)$, $(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (= ΤΟΠΟΣ), C^∞

• $\vec{F}$ Αστρόβιλο $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

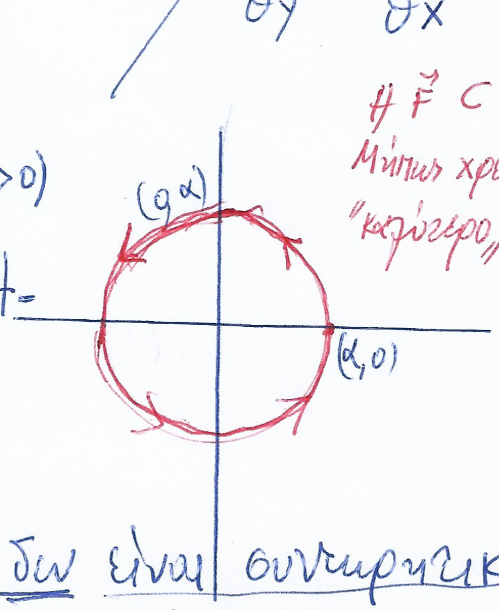
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Big/ \ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

• Γ $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$, $(a>0)$

∄ $\vec{F}$ C^∞
Μήπως χρειαζόμαστε "καλύτερο" Π.Ο.;;

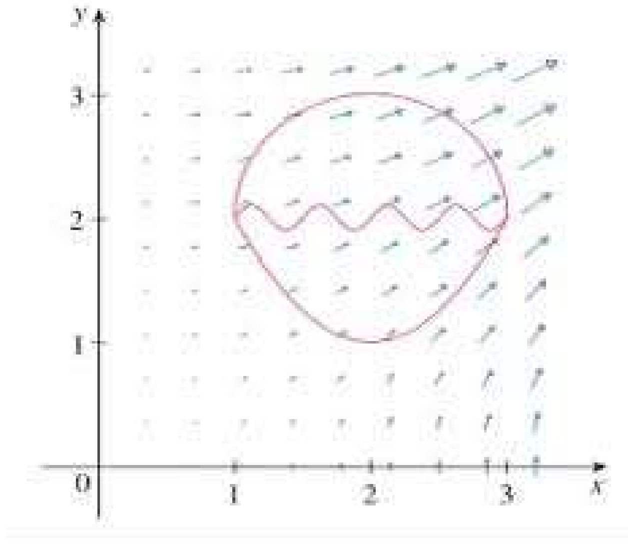
$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{a\sin t}{a^2}, \frac{a\cos t}{a^2}\right)\cdot(-a\sin t, a\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0$$



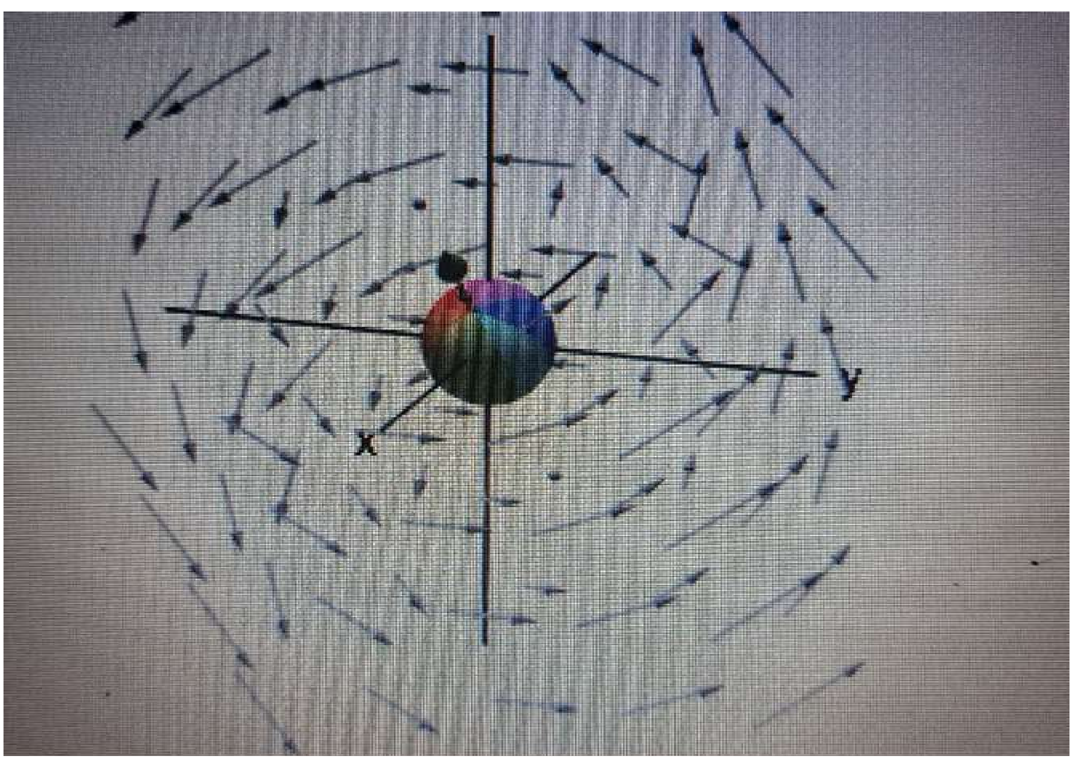
Άρα (Θεώρημα Συντ. Πεδίου) το $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό!!

ΣΧΟΛΙΟ $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι 2π ανεξάρτητο της ακτίνας a
Τυχαίο;; ΟΧΙ (Θ. Green)



ΑΣΚΗΣΗ 1.

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ



ΑΣΤΡΟΒΙΛΟ Δ.Π

<u>χωρίς να είναι</u> ΠΕΔΙΟ ΚΛΙΣΕΩΝ